Il problema ed il ruolo dell'infinito

Lezioni di Epistemologia e Storia della Matematica I/2

Carlo Marchini

1. **Infinito nella filosofia greca (1).**

La letteratura filosofica occidentale inizia con uno dei frammenti più discussi, conservato da **Simplicio** (VI sec. d.C.). **Anassimandro** (609 - 547 a.C.) afferma in esso (secondo una traduzione possibile):

> «Principio delle cose esistenti è l'infinito; ma donde le cose esistenti hanno l'origine in ciò anche avviene la dissoluzione, secondo la necessità. Infatti esse si causano a vicenda pena e distruzione per la propria ingiustizia secondo l'ordine del tempo»

Tra i motivi di discussione degli esegeti sono la traduzione ed il significato di *ἀρχη* (principio, Anfang o Ursprung), di *γένεσις*(origine) e, ciò che qui più ci interessa, *ἄπειρον* (infinito). Ad esempio F. **Nietzsche** (1844 - 1900) ed M. **Heidegger** (1889 - 1976) traducono: l'indeterminabile illimitato. **Aristotele** suggerisce di interpretarlo come la materia informe potenzialmente infinita. La parola è costituita da un prefisso *α*, il cosiddetto a privativo, associato a *πέρας*, che significa sia confini sia limiti. Perciò contemporaneamente ἄπειρον si può rendere sia con *infinito*, sia con *illimitato* ma anche come *indeterminato.*

Una più recente interpretazione del termine lo fa risalire ad una radice accadica il cui significato è polvere, facendo intravedere in questa citazione un prestito dalla cultura semitica riscontrabile anche nella Sacra Scrittura.

Forse ai tempi di **Anassimandro** l'analisi del concetto poteva far ritenere sinonimi infinito ed illimitato. E' possibile che l'infinito sia da intendere come ente ben preciso che non è visibile perché al di qua del visibile stesso e che si trova al di qua (o al di là) della stessa materialità, ma è quello che in qualche modo preordina l'origine delle cose esistenti; è però interpretabile anche come totalità non meglio specificata, anzi addirittura il caos da cui si è generato il Mondo (= universo), come risultato della dissoluzione dell'ordine immanente negli enti esistenti. Nella lingua greca talora ápeiron viene usato come determinazione analoga all'inglese *fuzzy*. E' poi forte la connessione tra infinito e tempo.

L'indagine sull'infinito attrae da quel momento la speculazione dei filosofi greci. **Anassimene** (586 - 528 a.C.) propone che l'origine delle cose sia l'aria infinita, in quanto l'aria rappresenta meglio di ogni altra sostanza l'illimitatezza e la onnipresenza propria dei principi primordiali.

Si vengono a creare ben presto due correnti: quella di coloro che vedono l'infinito in senso negativo, come qualcosa che manca di confini e quindi incompleto e nello stesso tempo ha connotati di confusione e di complicazione che lo rendono "repulsivo".

In questo partito hanno militato i pitagorici ed **Aristotele**.

Per altri, tra cui **Epicuro** (341 - 270 a.C.) , l'infinito è visto in senso positivo come quello che comprende e riassume in se tutte le qualità. Il passo di ritenere l'infinito come un attributo della divinità sarà poi compiuto da **Plotino** e dalla filosofia cristiana.

Purtroppo però ci resta assai poco della elaborazione della filosofia greca sull'argomento. Si può cogliere in modo parziale quale era la situazione, attraverso le critiche dirette ed indirette di **Aristotele** a certe concezioni dell'infinito.

2. Infinito della numerazione greca - Archimede.

Oggi la prima esperienza personale con l'infinito avviene nei primi anni di scuola elementare. Quando il bambino apprende il sistema di numerazione e la sua rappresentazione, pone immediatamente la domanda se c'è il "numero più grande". E' facile convincere lo scolaro che è sempre possibile aggiungere un'ulteriore unità al numero più grande ed ottenere così un numero ancora più grande.

Tutto ciò è oggi possibile perché per ogni numero, anche quelli non mai letti, c'è un nome. Lo stesso non avveniva in altre lingue ed altre culture, ad esempio il greco antico.

E' noto che la carenza di rappresentazione dei numeri ha senza dubbio influito sulle scelte della matematica greca, privilegiando gli aspetti geometrici a quelli numerici. Anche l'infinito è stato "bloccato" da questa carenza.

Il termine *miriade* è presente anche nella lingua italiana non con il significato di 104 ma con quello di un gran numero, addirittura non contabile, di enti; il prefisso *miria* viene usato nelle misure per indicare il multiplo secondo 10.000 di una unità base.

A ben pensarci anche il sistema di numerazione in uso oggi viene ben presto bloccato. E' facile scrivere mediante cifre il numero 7.241 e leggerlo *settemiladuecentoquarantuno*, ben più difficile è dare un nome ad un numero con settemiladuecentoquarantun cifre.

Tuttavia la rappresentazione dei numeri con le cifre risolve questi problemi e talvolta con la notazione esponenziale si abbrevia ulteriormente la scrittura.

Nella Grecia antica le cose non stavano così: *miriade* era contemporaneamente il numero diecimila ed il numero infinito. Altri esempi di questa situazione si riscontrano in testi antichi, ad esempio nella Sacra Scrittura: *settanta volte sette*.

In un trattato di **Archimede** (287 - 212 a.C.), l'*Arenario* per mostrare che il numero dei granelli di sabbia delle spiaggie della Sicilia non è infinito, viene calcolato il numero dei granelli di sabbia contenuti in una sfera il cui raggio è dato dalla distanza dalla Terra al Sole (determinata in modo abbastanza preciso da **Aristarco di Samo** (III sec. a.C.)).

La risposta è approssimabile con 10^{63} e per poterla dare **Archimede** si deve "fabbricare" appositamente un sistema numerico che vada al di là del limite delle *miriadi*.

Egli considerò come base M la miriade di miriadi, cioè $M = 10^8$, poi diede un nome a tutti i numeri fino a M^K, ove $K = M^2$, quindi fino a 10^W, con $W = 8\cdot 10^{16}$, in quanto per ogni coppia ordinata $\langle h,k\rangle$ di numeri naturali positivi $h,k \leq M$ egli introdusse i numeri dello h-esimo ordine e del k-ciclo. Quindi i nomi dei vari numeri vengono seguiti da queste specificazioni. I numeri fino a diecimila sono i numeri senza specificazioni, cioè quelli di ordine zero e ciclo zero. Il numero più grande raggiunto da **Archimede** è *una miriade di miriadi di unità del miriardesimo ordine e del miriardesimo ciclo*, cioè appunto M^K, molto più grande dei "soli" 10^{63} granelli di sabbia che gli servivano.

La ricerca di **Archimede** può essere vista sotto due aspetti: la necessità di numeri sempre più grandi dei ristretti diecimila offerti dalla lingua greca antica ma la preoccupazione di non "esagerare" col rischio di portare "dentro" l'infinito, e quindi il bisogno di porre un limite ben preciso.

3. L'infinito nella Filosofia greca (2).

Parmenide è drastico nell'affermare che l'infinito non esiste, come conseguenza della immobilità dell'Uno. Analizzando meglio il senso della sua l'affermazione è assai probabile che intendesse riferirsi all'infinito spaziale. **Melisso di Samo** (fine VI sec. - inizio V sec. a.C.) invece ricava dalla tesi parmenidea che data l'unicità dell'essere, esso deve essere infinito, non dovendo ammettere nulla al di fuori di sé.

La trattazione parmenidea sembra ispirarsi a quella di **Pitagora**. Il rapporto di quest'ultimo filosofo e seguaci con l'infinito è più complesso.

Come si sa, soprattutto da quanto ne dicono **Platone** ed **Aristotele**, per **Pitagora** il fondamento dell'universo è il numero. Al numero è affidato il compito di gestire e definire l'armonia che esiste tra i suoni e nel Mondo. I numeri hanno una loro "semantica": 1 è la *mente*, l'*Un*o, il *principio ordinatore*, 2 l'*opinione*, 3 la *completezza*, 4 la *giustizia*, 5 il *matrimoni*o.

Così ad esempio dal fatto che gli uomini abbiano 10 dita e che 10 = 1+2+3+4, tutti numeri assai significativi, i pitagorici concludono che 10 ha un ruolo nell'universo assai importante.

Perciò anche se in quel momento erano conosciuti solo 9 corpi celesti (diversi dalle stelle), essi postulano l'esistenza di un decimo pianeta, l'*Antiterra*, in opposizione alla Terra rispetto al Sole.

Fatte le debite proporzioni ciò si ripeterà più tardi con varie teorie astronomiche, fisiche e chimiche.

La tavola delle categorie, attribuita a Filolao (si vedano le lezioni sulle Categorie), presenta al primo posto la diade

determinato - indeterminato,

traduzione dal greco, che potrebbe essere letta anche come *limitato - illimitato* o *finito - infinito*.

In questa diade il termine indeterminato o illimitato o infinito è sinonimo di imperfetto, di incompiuto, di ciò che si qualifica come il non-essere, è la sfera del disordine dell'inconoscibile, ovvero della materia.

Attenzione il termine qui tradotto con indeterminato è ancora ápeiron e forse vuole dire infinito nell'accezione negativa del termine.

Il ruolo fondamentale del numero nell'universo fa sì che Pitagora suggerisca che tutto sia numero, o meglio, che tutto si possa ridurre a rapporti tra numeri. Molte delle idee del filosofo della Magna Grecia resteranno a lungo nella cultura occidentale in modo più o meno esplicito.

Torniamo alla Matematica: il risultato che anche gli scolari di scuola media attribuiscono a **Pitagora**, il teorema sui triangoli rettangoli ha una "sorprendente" conseguenza. La lunghezza di un segmento è intuitivamente associata al "numero" di punti (indivisibili ed estesi) che vi "appartengono". Questo numero senza dubbio supera le miriadi, termine ultimo per parlare di finito. Dunque è un numero infinito di punti. Per fortuna non c'è bisogno diretto di contare i punti di un segmento, meglio ricondursi a numeri più abbordabili considerando il rapporto con il numero dei punti che costituiscono un altro segmento.

Ad esempio preso un quadrato, la diagonale del quadrato ha lunghezza maggiore del lato, ma minore del doppio del lato, di conseguenza il numero dei punti che costituiscono la diagonale sarà

maggiore del numero dei punti che costituiscono il lato e minore di quello che esprime il numero dei punti di un segmento doppio del lato.
La presenza di queste due limitazioni ed il fatto che i rapporti del numero di punti che costituiscono il lato o il doppio del lato, con il numero di punti che costituiscono il lato del quadrato sono rispettivamente 1 e 2 (direi banalmente).
Quindi il rapporto del numero dei punti che costituisce la diagonale rispetto al numero di punti che costituisce il lato è così compreso tra 1 e 2.
Questa limitazione garantisce che si possa considerare il rapporto di tali numeri infiniti. Non è invece possibile considerare il rapporto tra il numero di punti che costituiscono una retta o un piano, col numero di punti che costituiscono un segmento.
Il confronto delle lunghezze, è in realtà il confronto tra il numero de punti che si trovano sulla diagonale ed il numero di quelli che stanno sul lato del quadrato e questo rapporto deve essere compreso tra 1 e 2. Così anche se si fa il rapporto tra due numeri infiniti di punti, nel senso detto prima, alla fine il risultato è un numero che esprime tale rapporto, oggi diremo un numero razionale.
Quando **Ippaso di Metaponto** (V sec. a.C.) scopre l'incommensurabilità della diagonale e del lato del quadrato, la sua scoperta mette in crisi tutta la scuola pitagorica ed **Ippaso** paga l'affronto con la vita.
La crisi era tra intuizione e ragione ed è forse il primo caso in cui la seconda va in senso contrario alla prima. Il punto perde così di estensione, la retta di larghezza, la superficie di spessore e non tutti i concetti matematicamente interessanti sono esprimibili come rapporti tra numeri naturali. Gli enti della Matematica smettevano di essere sensibili, divengono puramente intelligibili, però questo apriva la strada all'infinito. Ci vorrà poi **Archita** (430 - 360 a.C.) a dimostrare che il rapporto tra questi due segmenti non si può esprimere con quello tra due numeri interi.
Da queste considerazioni appare quale poteva essere il concetto di infinito di **Pitagor**a. Non è l'infinito in senso *attuale* o *potenziale* di cui si parlerà in seguito, piuttosto viene introdotto il concetto che oggi si può chiamare infinito *naturale*. Per questo alcuni autori arguiscono che **Pitagora** non accetta l'infinito, certamente non quello attuale, forse quello in senso potenziale. In realtà è abbastanza facile attribuire a Pitagora le proprie idee perché non è rimasto nulla di autentico del filosofo-matematico, solo i giudizi dei suoi ammiratori e/o detrattori. Per altri commentatori i pitagorici avrebbero ripreso l'infinito di **Anassimandro**, immaginando che tale "materia" primigenia si condensi attorno a centri monadici, in configurazioni (i numeri) disposti secondo un ordine geometrico, riprendendo e specificando le idee dell'aria infinita di **Anassimene**.
Oggi le cose non sono molto cambiate dalle impostazioni pitagoriche. Tutta la Scienza si basa sulla Matematica e se non si può dire che tutta sia (esprimibile con un) numero, certamente funzioni,

vettori, equazioni, eccetera, hanno preso il luogo dei numeri pitagorici; l'interpretazione della conoscenza della natura con la Matematica è un fatto ampiamente accettato.

Di più, l'irruzione della informatica e del mondo digitale, ha riportato in auge il numero naturale come espressione della realtà (virtuale). Si può dire con R. Grierson e S. Munro-Hay, *L'Arca dell'Alleanza*, Mondadori, Milano, 2000, che il mondo odierno ha realizzato in pieno l'ideale pitagorico:

> «Il nostro futuro acquista una sorprendente somiglianza con il nostro passato: un mondo platonico o pitagorico di informazione digitale, in cui l'intangibile e l'intelletivo sono più reali delle forme materiali».

4. I paradossi di Zenone e la concezione potenziale.

Contemporaneamente, o poco dopo, si deve essere sviluppata una concezione di infinito, paragonabile a quella adottata da **Cantor** nel XIX secolo. Di questo non vi sono prove dirette, ma la polemica di **Zenone di Elea** non avrebbe avuto il potere dirompente che ebbe senza una forte posizione contrapposta. Ad esempio **Ippocrate di Chio** (V sec. a.C.) nel provare che i cerchi sono proporzionali ai quadrati dei loro raggi utilizza una visione infinitesimale che fa pensare, per contro all'infinito contro cui argomenta **Zenone**.

Anche gli scritti di **Zenone** ci sono giunti di seconda mano, probabilmente ampiamente interpolati. Forse con i paradossi voleva difendere ad oltranza le idee del suo maestro, **Parmenide**, contro le critiche che l'ipotesi di immobilità ed unità dell'essere si era attirate. Gli argomenti di **Zenone** sono una confutazione delle idee di pluralità, movimento (quelli più noti detti: *Dicotomia*, *Achille e la Tartaruga*, la *Freccia*, lo *Stadio*) e di luogo (*ogni cosa che esiste in uno spazio che a sua volta è contenuto in uno spazio e così via all'infinito*). Interessante è pure il paradosso del *grano di miglio* (se un grano di miglio cade non fa rumore, dunque se cadono 10 tonnellate di grani di miglio non fanno rumore), che riguarda la percezione, ma ha riflessi sul principio di induzione. Essi sono assai importanti perché prefigurano il procedimento di dimostrazione indiretta mediante la riduzione all'assurdo.

I paradossi sul movimento sono stati analizzati matematicamente con la teoria delle serie. **Hilbert** vedeva in essi un'analisi sulla inapplicabilità ai fenomeni microscopici delle leggi valide macroscopicamente. Alcuni paradossi si scontrano con l'idea del punto avente una estensione e della sua indivisibilità.

Per **Zenone** il ritenere l'infinito un attributo dell'essere, per l'inesauribilità dell'infinito stesso, comporta irrazionalità ed impossibilità dell'essere.

E' questa la visione dell'infinito in *atto* contro cui argomenta. Secondo la concezione in atto, è dato un ente assieme ai suoi attributi infiniti.

Parlando di insiemi, un insieme è infinito in atto quando è presente alla contemplazione o all'esistenza assieme a tutti i suoi elementi.
Ad esempio l'insieme dei numeri naturali, pensato appunto assieme a tutti i numeri naturali, può essere visto come un infinito in atto. Questa, come anticipato prima, è la concezione oggi più diffusa in Matematica. La retta (ed anche ciascun segmento) come insieme di punti è infinita, l'insieme dei numeri reali, dei numeri complessi sono infiniti; così pure gli spazi funzionali, eccetera.
Si presti attenzione che due frasi, apparentemente equivalenti, hanno però origine da idee ben diverse. Le due frasi sono:

Esistono infiniti numeri naturali (o più correntemente e scorrettamente, *I numeri naturali sono infiniti*);

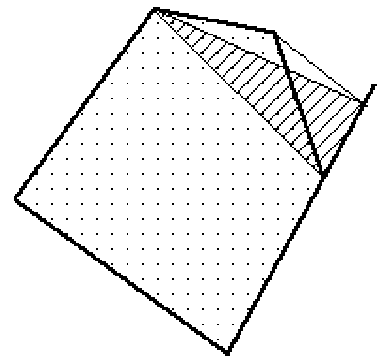
L'insieme dei numeri naturali è infinito.

La prima può essere accettata anche da chi accetta solo l'infinito in *potenza*: dato che c'è il procedimento di passaggio al successivo che garantisce la possibilità di passare oltre (infinito come incompleta enumerazione). La seconda frase è invece tipica dell'accettazione dell'infinito in *atto*; una spia di ciò è la parola insieme (avrebbe potuto essere sostituita anche da collezione o altro: è il processo mentale di raccolta in un uno che porta a questo tipo di infinito).
In realtà nella pratica matematica odierna si adotta un atteggiamento abbastanza opportuno. Certe considerazioni si svolgono indifferentemente su insiemi finiti ed infiniti, e solo in specifiche occasioni, messe spesso in chiara evidenza, si utilizzano le ipotesi di finitezza o infinità. Quindi si può dire che più che di Matematica del finito o dell'infinito, oggi, in molte considerazioni, si prescinde da questi connotati.
Un probabile bersaglio delle polemiche di **Zenone** poteva essere **Anassagora** (496 - 428 a.C.), che riprende la tesi di **Parmenide** dell'Uno, ma non ne accetta l'immobilità e la mancanza di determinazioni. Ci è rimasto un significativo frammento della sua opera *Sulla Natura*, in cui affronta il tema dell'infinito:

> «Rispetto al piccolo non c'è un minimo, ma c'è sempre un più piccolo perché l'esistente non può essere annullato [per divisione]. Così, rispetto al grande c'è sempre un più grande e il più grande è eguale al piccolo come pluralità, e in se stessa ogni cosa pensata come somma d'infinite parti è insieme grande e piccola»

Sono così presenti le nozioni di infinito ed infinitesimo, poste a stretto confronto. Sembra però da un lato interpretare la suddivisibilità infinita come poi farà **Aristotele**, in senso potenziale. La frase «il più grande è eguale al più piccolo come pluralità» fa invece pensare ad un infinito in *atto*, l'insieme degli *infinitesimi* e quello degli *infiniti*.

Nonostante la critica di **Zenone**, l'infinito in atto è presente nei pensatori greci. Lo si può arguire oggi dal ritrovamento assai fortunato, nel 1906, di un'opera di **Archimede**, *Metodo sui teoremi meccanici*, in cui il siracusano espone come ha ottenuto importanti risultati (la fase di scoperta) e dal successivo lavorio per dimostrare quanto intuito mediante i canoni della geometria euclidea. Ma qui interessano le critiche di **Archimede** al metodo utilizzato da **Democrito** per determinare il volume della piramide e del cono. Analizziamo in breve il problema. E' ben noto che si può ricondurre con operazioni elementari di scomposizione, la determinazione dell'area di un poligono a quella di un triangolo o di un parallelogrammo.



Le figure così ottenute sono "equiscomposte" o "equiscomponibili".

Date due figure equiscomposte in un numero finito di parti (ciascuna delle quali di estensione facilmente determinabile), grazie alla teoria dell'equivalenza, esse hanno la stessa estensione. Si può dire di più: due poligoni sono equivalenti se e solo se sono equiscomponibili.

Da queste considerazioni si trae che equiscomponibilità ed equivalenza, per i poligoni, sono equivalenti. Le cose cambiano drasticamente se si considerano figure non poligonali. Ad esempio un quadrato ed un cerchio equivalenti non sono equiscomponibili. Nello spazio le cose vanno anche peggio come provato nel 1903 da M. **Dehn** (1878 - 1952). Già per le piramidi equivalenza ed equiscomponibilità non coincidono.

Per verificare l'equivalenza tra figure piane non equiscomponibili o tra figure solide potremmo aumentare il numero dei pezzi. Per le piramidi, o più in generale le figure solide si può procedere facendo uso di scaloidi, che sono l'analogo dei poligoni inscritti e circoscritti ad una figura piana. Un altro metodo è quello degli indivisibili di B. **Cavalieri** (1598 - 1647) e di E. **Torricelli** (1608 - 1647).

In questo modo si prova qualcosa di analogo alla equiscomponibilità, però a patto di spezzare le figure in un numero infinito di pezzi, ciascuno dei quali di estensione infinitesima, anche se più correttamente un tale approccio è più attribuibile a **Torricelli** che a **Cavalieri**, dato che quest'ultimo rifuggiva dal pensare per infinitesimi ed infiniti. Tali tecniche utilizzano l'infinito; per la prima forse è sufficiente l'infinito potenziale, la seconda sicuramente usa l'infinito in senso attuale. Per applicare il procedimento al calcolo del volume della piramide e del cono, **Democrito** utilizza questo procedimento infinitesimale che richiede l'infinito in atto. Questo almeno è quanto si desume da un frammento di **Plutarco** (56 - 125 d.C.) che ci presenta **Democrito** alle prese con **Crisippo** (281 - 208 a.C.):

> «guarda inoltre in qual modo [Crisippo] discusse il seguente dubbio in modo scientifico e preciso con Democrito, che proponeva: se un cono venisse segato con dei piani paralleli alla base, che cosa si deve pensare delle superfici delle sezioni? Sono uguali o diseguali? Infatti, se fossero diseguali, renderebbero irregolare il cono, che riceverebbe molte scalfitture con l'aspetto di gradini, e scabrosissime; se invece le superfici fossero uguali, sarebbero eguali le sezioni e sembrerebbe che il cono desse l'impressione di un cilindro come se fosse composto di cerchi uguali e non disuguali, ciò che sarebbe estremamente fuor di luogo.»

Per tutta la scuola atomistica l'infinito è un attributo del vuoto, come principio della derivazione degli infiniti mondi.

5. Platone e l'infinito.

L'atteggiamento di **Platone** è più facilmente controllabile. Nel *Filebo* **Platone** per bocca di **Socrate** sostiene che

> «Tutto ciò che non accoglie questi caratteri [i caratteri dell'infinito, prima esposti, essenzialmente il *passare per il più e per il meno*] ed anzi accoglie tutti i loro contrari: anzitutto l'uguale e l'uguaglianza, e dopo l'uguale il doppio e tutto ciò che riguarda (il rapporto di) numero a numero o (di) misura a misura, tutte queste cose insieme non faremo forse bene a comprenderle nel *limite*?».

In questo passo **Platone** riafferma che la Matematica è il dominio del finito. Tuttavia all'infinito **Platone** attribuisce la natura di sostanza. La Matematica (classica) odierna, profondamente connessa con l'infinito, si aggancia notevolmente alle posizioni platoniche che in linea di principio lo escludono. A giustificare questa posizione si può invocare lo stesso dialogo. In esso **Platone** sembra affermare che gli enti matematici partecipano al mondo delle Idee, in quanto **Socrate** parla di concezione della sfera in sé:

> «Possiederà in modo idoneo la scienza colui che, avendo la concezione del cerchio in sé, della sfera in sé divina, ignora questa sfera umana e questi cerchi, e avendo bisogno per costruire una casa si serve di quelli e similmente di altre rette (righe) e di altri cerchi?».

Questa interpretazione è assai discussa e per alcuni studiosi è scorretto ricondurre la Matematica al realismo platonico in senso stretto.

In un altro dialogo, il *Carmide*, **Platone** pone un problema che sarà ripreso da **Galilei**. Dice infatti **Socrate** parlando con Crizia:

> «(*Socrate*) - Dunque se trovassimo una cosa che fosse maggiore delle altre cose maggiori e di se stessa, ma non fosse maggiore di nessuna delle cose minori, avverrebbe necessariamente che questa cosa, pur essendo maggiore di se stessa, sarebbe di se stessa anche minore, non è vero?
> (*Crizia*) - Sarebbe strettamente necessario, o Socrate, disse.
> (*Socrate*) - E così, se una cosa è doppia degli altri doppi e di se stessa, essa è doppia della metà che la costituisce e delle altre metà: infatti un doppio non può essere doppio che di una metà.
> (*Crizia*) - E' vero.
> (*Socrate*) - Dunque sarebbe insieme maggiore e minore di se stessa»

Nel resto del dialogo si conclude che questa "cosa" non può essere né una grandezza né una quantità, mentre può essere la saggezza. Infatti per Platone la saggezza è una scienza che ha per oggetto se stessa e le altre scienze, pur senza avere come oggetto l'oggetto delle altre scienze. Al giorno d'oggi questa confusione tra linguaggio e metalinguaggio può fare sorridere. Un'attenta analisi può far invece ritenere che Platone abbia voluto prendere posizione con questo dialogo in una qualche discussione riguardante paradossi (diversi da quelli di Zenone) causati dall'accettazione dell'infinito in atto.

6. Eudosso e la teoria delle proporzioni.

La presenza dei paradossi dell'infinito e gli interessanti risultati matematici ottenuti con l'infinito, spinge **Eudosso** di Cnido ad elaborare una teoria delle proporzioni, ripresa e forse interpolata poi da **Euclide** nel V libro degli *Elementi*, mediante la quale si può operare anche sui rapporti, come quello della diagonale e del lato del quadrato, che non possono essere rappresentati come rapporti di numeri naturali, senza aver bisogno dell'infinito in atto, anzi senza mai neppure nominare l'infinito. Si deve poi a **Eudosso** il metodo di esaustione (non il nome), anch'esso volto ad eliminare l'infinito in atto. Vediamo le definizioni fondamentali come sono riportate da **Euclide** nel Libro V (nella traduzione di A. Frajese e L. Maccioni).

«Definizione I - Una grandezza minore è parte di una grandezza maggiore se (la minore) misura la maggiore

Definizione II - Multiplo è il maggiore del minore se è misurato dal minore

Definizione III - Rapporto (λόγος) di due grandezze omogenee è un certo modo di comportarsi secondo la quantità.

Definizione IV - Si dice che hanno rapporto tra loro le grandezze tali, che l'una di esse, moltiplicata, possa superare l'altra.

Definizione V - Si dice che le grandezze sono nello stesso rapporto, la prima rispetto alla seconda e la terza rispetto alla quarta, se equi multipli della prima e della terza rispetto agli equi multipli della seconda e della quarta, sono ordinatamente, o insiemi maggiori, o insiemi eguali, o insiemi minori [1].

Definizione VI - Le grandezze aventi lo stesso rapporto si dicono in proporzione (ἀνάλογον).

Definizione VII - Se degli equi multipli [2] quello della prima (grandezza) supera quello della seconda, mentre quello della terza non supera quello della quarta, si dice che la prima grandezza ha rispetto alla seconda rapporto maggiore di quello che la terza ha con la quarta.

Definizione VIII - Una proporzione che consista di tre termini è la minore possibile.

Definizione IX - Quando tre grandezze sono proporzionali, si dice che la prima ha con la terza rapporto duplicato rispetto a quello che ha con la seconda

[1] Cioè: $a : b = c : d$ se, in qualunque modo si scelgano due numeri interi m, n, secondo si abbia ma maggiore, uguale o minore di nb è corrispondentemente mc maggiore, uguale o minore di nd.

[2] Equimultipli della prima e della terza grandezza, ad esempio ma, mc, ed equimultipli della seconda e della quarta grandezza, ad esempio nb, nd.

Definizione X - Quando quattro grandezze sono proporzionali, si dice che la prima ha con la quarta rapporto triplicato a quello che ha con la seconda, e si procederà sempre così di seguito, comunque sia la proporzione data in principio.

Definizione XI - Si dicono grandezze omologhe gli antecedenti rispetto agli antecedenti ed i conseguenti rispetto ai conseguenti.

Definizione XII - Si ha rapporto permutato quando si prenda in considerazione l'antecedente rispetto all'antecedente ed il conseguente rispetto al conseguente.

Definizione XIII - Si ha rapporto inverso quando si prenda in considerazione il conseguente come antecedente rispetto all'antecedente come conseguente.

Definizione XIV - Si ha composizione di rapporti quando si consideri la somma dell'antecedente e del conseguente in rapporto al conseguente preso da solo.

Definizione XV - Si ha scomposizione di rapporti quando si consideri la differenza tra l'antecedente ed il conseguente in rapporto al conseguente preso da solo.

Definizione XVI - Si ha conversione di rapporti quando si consideri il conseguente in rapporto alla differenza tra l'antecedente ed il conseguente.

Definizione XVII - Date più grandezze ed altre in ugual numero, [disposte le une e le altre in un determinato ordine], se delle prime grandezze vengono prese a due a due quelle consecutive ed esse sono nello stesso rapporto delle corrispondenti consecutive fra le seconde grandezze, si ha rapporto *ex aequo* quando delle prime grandezze la prima stia all'ultima come delle seconde grandezze la prima stia all'ultima; o altrimenti: è il prendere in considerazione gli estremi con omissione dei medi.

Definizione XVIII - Date tre grandezze ed altre grandezze in ugual numero si ha una proporzione perturbata quando avviene che, delle prime grandezze, la prima sta alla seconda come delle seconde grandezze la seconda sta alla terza, mentre, delle prime grandezze, la seconda sta alla terza come delle seconde la prima sta alla seconda.»

I testi di matematica odierni presentano i loro argomenti con ben altro stile. Ad esempio è assai difficile interpretare le prime due definizioni ed utilizzarle in modo efficace, senza riscriverle completamente. Si osservi che per millenni esse hanno rappresentato il culmine del rigore in Matematica ed in generale nell'attività speculativa. Per meglio chiarirle, anche in rapporto al tema dell'infinito potenziale, è bene ricordare quanto scrive **Aristotele** nella *Metafisica*:

«In un senso parte è ciò in cui una quantità può comunque essere divisa; infatti ciò che è sottratto da una quantità, in quanto quantità, è sempre chiamato "parte" di essa, come ad esempio due è detto essere, in un senso parte di tre. Ma in un altro senso parte è soltanto ciò che misura delle quantità. Così due è, in un senso, detto essere parte di tre, in un altro no.»

E' evidente l'uso di parte per sottomultiplo (secondo un naturale) di una grandezza data, come verrà meglio specificato nella definizione II. Quindi misura altro non è se non il numero naturale secondo cui una grandezza è multipla dell'altra e non già il rapporto di una grandezza con una grandezza campione [3] . C'è quindi in **Euclide** la distinzione tra *misura* e *rapport*o. Ma allora la possibilità di trovare parti è collegata con la possibilità di dividere una grandezza, però sempre secondo un numero naturale e l'infinità che viene considerata è la stessa con cui vengono considerati i numeri naturali.

Sono poi assai importanti le successive quarta e la quinta. La definizione IV limita la considerazione del rapporto tra due grandezze omogenee solo al caso in cui una di esse, moltiplicata, sarebbe meglio dire, con un'addizione ripetuta, superi l'altra, cioè soltanto al caso in cui le grandezze soddisfino a quel Principio che sembra dovuto a **Eudosso** ma che altri hanno chiamato Principio di **Archimed**e, per l'ampio uso che ne fa il siracusano nelle sue opere. Per non fare dei torti, qui ci si riferiamo ad esso col nome di *Principio di Eudosso-Archimede*. In conseguenza a questa definizione, è sempre possibile determinare il rapporto di due segmenti, di due rettangoli delle stessa base, di due cerchi. Non è invece possibile determinare il rapporto tra un segmento e una retta e neppure tra un rettangolo e un angolo.

La Definizione V stabilisce quando si dice che due grandezze sono nello stesso rapporto di altre due (cioè, in sostanza, è la definizione di proporzione). E' una definizione necessariamente complicata poiché essa vale sia per le grandezze commensurabili che per quelle incommensurabili. Essa pertanto non risponde alla intuizione immediata di eguaglianza di rapporti. Sotto questi aspetti venne criticata da **Galilei** che propose

> «Allora quattro grandezze sono proporzionali, quando gli ugualmente multiplici della prima e della terza, presi secondo qualunque multiplicità, si accorderanno sempre nel superare, mancare o pareggiare gli ugualmente multiplici della seconda e della quarta.»

ma questa proposta non è altrettanto corretta della Definizione V, dato che si considerano solo multipli secondo uno stesso numero (naturale). Quella di **Euclide** è assai più raffinata e precisa. Oggi si trova in certi testi che quattro grandezze A, B, C e D sono in proporzione, e si scrive $A : B = C : D$ se il prodotto delle misure di A e D eguaglia il prodotto delle misure di B e C. Questo approccio è senza dubbio riduttivo e nasconde l'accettazione dell'infinito in atto, che **Eudoss**o vuole evitare, in quanto per attribuire una misura ad una qualunque grandezza (rispetto ad una prefissata misura assegnata) servono i numeri reali che nella accezione più diffusa in Matematica vengono definiti mediante l'infinito in atto.

Talora sui testi si trovano proporzioni scorrette, in quanto vengono messe a confronto grandezze dis-omogenee, ma l'errore fondamentale è che per definire la misura delle grandezze c'è bisogno di definire la loro proporzionalità e non viceversa. Questa analisi fa comprendere l'importanza della definizione V nella formulazione euclidea, basata sostanzialmente sull'idea di multiplo. Essa serve

[3] Per quanto riguarda i segmenti, sarà prima **Bombelli** e poi **Cartesio** ad introdurre il segmento unitario, rendendo così possibile sia l'introduzione del metodo delle coordinate, sia la costruzione di un segmento avente rapporto con il segmento unitario un (arbitrario, ma non troppo) numero reale.

appunto a stabilire quando quattro grandezze hanno, a due a due, rapporti eguali. Da questa definizione discende che la relazione tra le coppie ordinate di grandezze è una relazione di equivalenza, e questo ancora una volta senza scomodare l'infinito.

La sostanza di questa teoria verrà ripresa da R. **Dedekind** (1831 - 1916) con la nozione di sezione dell'insieme dei numeri razionali, con notevoli differenze a riguardo dell'infinito. Per **Eudosso** (ed *Euclide*) la cosa importante era il rapporto (il numero reale nel sistema di rappresentazione greco), e la descrizione in termine di insiemi potenzialmente infiniti ha solo uno scopo pratico. L'atteggiamento di **Eudosso** sembra più vicino alla esperienza delle misure in fisica. Ogni misura diretta è data da un numero razionale. La possibilità di un aumento di precisione degli strumenti corrisponde alla totalità potenzialmente infinita delle grandezze commensurabili che approssimano il rapporto di due incommensurabili. Per **Dedekind** il punto centrale è la coppia di insiemi di numeri razionali, ciascuno infinito in atto, le sezioni hanno una propria esistenza nel mondo della mente e con esse i numeri reali, siano essi definibili mediante procedimenti finiti o no.

7. **Il procedimento di esaustione.**

La visione dell'infinito come potenza è poi alla base del procedimento di *esaustione* (esaurimento), attribuito ad **Eudosso**, che si basa sostanzialmente su alcuni principi che coinvolgono l'infinito. Il nome è di G. **de Saint Vincent** (1584 - 1669) nel 1647. Il procedimento è applicato sistematicamente nel Libro XII degli *Elementi*, in particolare nella Proposizione 2. Le origini di tale procedimento si possono far risalire al sofista **Antifonte** (metà del V sec. a.C.), che proponeva di determinare empiricamente la superficie del cerchio considerando l'area dei poligoni regolari inscritti con 4, 8, 16 lati, e così via.

Si tratta di una tecnica geometrica dimostrativa che passa attraverso una *dimostrazione per assurdo*, che permette di provare i risultati trovati per altra via. Esempi di ciò sono presentati anche nel testo *Metodo ecc.* di **Archimede**, in cui le scoperte fatte con intuizione meccanica vengono poi giustificate mediante l'esaustione. Dice infatti **Archimede** in una lettera ad **Eratostene** (274 - 194 a.C.):

> «Ho creduto bene esporti […] le particolarità di un metodo, mediante il quale ti sarà possibile acquistare una certa facilità di trattare cose matematiche per mezzo di considerazioni meccaniche. Son persuaso, del resto, che questo metodo sarà non meno utile anche per la dimostrazione degli stessi teoremi.
> Infatti, anche a me alcune cose si manifestarono prima per via meccanica, e poi le dimostrai geometricamente; perché la ricerca fatta con questo metodo non importa una vera dimostrazione. Però è certamente più facile dopo avere con tale metodo acquistato una certa cognizione delle questioni, trovarne la dimostrazione, anziché cercarla senza averne alcuna cognizione preliminare. Per questa ragione, anche quei teoremi, riguardanti il cono e la piramide, di cui Eudosso trovò per primo la dimostrazione, cioè che il cono è la terza parte del cilindro e la

piramide è la terza parte del prisma, aventi la stessa base e altezza uguale, un merito non piccolo dovrebbe attribuirsi a Democrito, che per primo enunciò questa proprietà delle dette figure senza dimostrazione».

Ad esempio, si provi l'equivalenza delle figure C e S. Si assume *per assurdo* che non siano equivalenti e, ad esempio, che C abbia estensione maggiore di S. Si considera la differenza $D = C - S$. Si utilizza una nuova figura P_1 minore tanto di C che di S. La figura P_1 è scelta in modo da permettere di passare poi ad una figura P_2 maggiore di P_1, ma sempre minore di C e di S, indicando un metodo per ripetere tale costruzione in modo potenzialmente infinito, senza giungere mai ad un'ultima figura P. All'aumentare dell'indice le figure P_r approssimano sempre di più C, non riescono mai ad esaurirlo e che la differenza tra C e un opportuno P_s sia piccola quanto si vuole. Dato poi che ciascuna delle figure P_h ha estensione minore di S, la differenza tra C e queste figure ausiliarie resta sempre maggiore dell'estensione di D.

Questa tecnica richiede che il procedimento di costruzione della figura P_{k+1} sia sempre possibile a partire da P_k, introducendo una "inesauribilità" in potenza delle figure geometriche. Utilizza inoltre il confronto solo di grandezze che soddisfano la Definizione IV, del Libro V. Questo procedimento di esaustione viene usato spesso con il cerchio C o la circonferenza ed i poligoni P_n regolari iscritti in C (XII.2). Il passaggio da P_k a P_{k+1} è la costruzione del poligono col doppio di lati.

Più delicata è l'operazione di confronto tra i poligoni P_r e S, in quanto per fare ciò si richiedono dimostrazioni ad hoc ogni volta. Il procedimento di esaustione è rigoroso, permette di dimostrare l'equivalenza, non fornisce alcuna via per trovare l'equivalenza stessa.

La teoria delle proporzioni ed il metodo di esaustione non eliminano l'infinito: nelle proporzioni c'è bisogno del confronto tra tutti gli equimultipli possibili di due grandezze, nel metodo di esaustione si deve procedere indefinitamente. Entrambi privilegiano l'infinito in potenza.

8. Aristotele e l'infinito.

Le scoperte di **Eudosso** (ed i paradossi di **Zenone**) ispirano ad **Aristotele** la sua posizione di difesa dell'infinito in potenza ed il suo rifiuto dell'infinito in atto. Dice lo stagirita:

«Una cosa viene da un'altra senza fine, e ciascuna di esse è finita, ma ve ne sono sempre di nuove».

Per rimarcare la differenza tra potenziale e in atto, **Aristotele** afferma che una lunghezza, un segmento, non è composto di infinite parti (in atto) ma è divisibile infinite volte (in potenza).

In questo senso l'*infinito* di **Anassimandro** ha perso il connotato di principio o origine del reale. Per **Aristotele** questo va cercato nel *divenire*; tuttavia egli evita l'identificazione del concetto di positività con l'infinito perché identifica il Bene, la Forma, l'Atto puro nella perfezione. E' ben nota l'influenza sull'etica e l'estetica greca antica avuta dall'ideale di perfezione. Probabilmente questo stesso ideale informa tutto il pensiero aristotelico.

Certamente al momento di definire cosa si deve intendere per *Scienza deduttiva*, la preoccupazione di **Aristotele** di evitare l'infinito in atto fa compiere scelte ben precise.

Negli *Analitici Secondi* viene definita una *Scienza deduttiva*: è un insieme *S* di enunciati tale che:

I) *Postulato di realtà*. Ogni enunciato di *S* deve riferirsi ad uno specifico dominio di enti reali.

II) *Postulato di verità*. Ogni enunciato deve essere vero.

III) *Postulato di deduttività*. Se certi enunciati appartengono ad *S*, ogni conseguenza logica di questi enunciati deve appartenere a S.

IV) *Postulato di evidenza* (per termini). Ci sono in *S* un numero (finito) di termini tali che

(a) il significato di questi termini è ovvio e non richiede ulteriori spiegazioni (*termini primitivi*);

(b) ogni altro termine è *definibile* per mezzo di questi termini.

V) *Postulato di evidenza* (per assiomi). Ci sono in *S* un numero (finito) di enunciati tali che

(a) la verità di questi enunciati è ovvia e non richiede ulteriori dimostrazioni (*assiomi*);

(b) la verità di ogni altro enunciato appartenente ad *S* deve essere stabilita mediante l'inferenza dagli enunciati dati (teoremi).

E' facile criticare oggi la presentazione di **Aristotele**, per la confusione tra linguaggio e metalinguaggio, per la mancata differenza tra aspetti semantici e sintattici, per le ipotesi ontologiche sottintese e per il privilegio dato al linguaggio, visto come strumento di conoscenza con funzione universale.

I termini primitivi (come gli assiomi) sono posti per evitare un *regresso all'infinito* che toglierebbe valore conoscitivo alla scienza; altrimenti per comprendere ciò di cui si parla si deve interpretare correttamente tutto ciò che serve per giungere alla sua definizione, ma è impossibile in via di principio perché si dovrebbe avere una conoscenza infinita. Il mettere esplicitamente limiti al regresso fa pensare che, in linea di principio, attraverso il linguaggio sarebbe possibile un procedimento infinito in cui ogni ente trova una definizione a partire da concetti più semplici.

Aristotele indica nell'evidenza (e nel buonsenso) il limite di tale analisi all'indietro. Ciò vuol dire scegliere tra gli innumerevoli enti quelli che hanno due connotati fondamentali:

sono di significato ovvio e

permettono di riottenere gli altri attraverso le definizioni.

Il compito delle definizioni, in tale visione, è quella di servire come strumento per articolare una conoscenza *già posseduta*, per porre ordine ad una realtà che per altre strade è nota. Forse sotto questo aspetto è motivata l'interpretazione di J. Barnes [4]:

[4] J. Barnes, *Aristotle's Theory of Demonstration* in **Articles on Aristotle, 1. Science** a cura di J. Barnes, M. Schofield, R. Sorabji, London, Duckworth, 1975, citato da C. Cellucci *La Logica fra Filosofia, Matematica e Informatica.* Notizie di Logica, anno X, n. 2/3 1991, 13 – 23.

> «la teoria … non viene mai intesa come uno strumento per guidare o formalizzare la ricerca scientifica: riguardava solo l'insegnamento di fatti già acclarati.»

Non sono posti però limiti (e non sono neppure pensati) alla possibilità di procedere con definizioni e deduzioni, ammettendo un modo di procedere potenzialmente infinito.

9. Euclide e l'infinito.

Euclide è molto probabilmente influenzato dalla visione platonica della Geometria, ma per esporla, forse per gli intenti didattici, si conforma largamente ai requisiti aristotelici, anche se alcuni studiosi rifiutano di vedere una filiazione diretta di **Euclide** da **Aristotele**.

Se si accetta questa tesi, i numerosi punti di contatto nell'impianto metodologico degli *Elementi,* testimoniano di una diffusa concezione epistemologica che viene adottata da entrambi.

Vi è tuttavia una differenza importante tra i due: le definizioni (e i teoremi) vengono introdotti geneticamente, vale a dire in una definizione intervengono soltanto termini definiti precedentemente, non quelli definiti successivamente (risp. vengono utilizzati nelle dimostrazioni solo teoremi precedentemente dimostrati).

Ciò non viene chiarito dalla presentazione della Scienza deduttiva.

Le possibili spiegazioni di siffatta "carenza" sono : il procedimento è dato per scontato oppure non è necessario.

Pare più probabile che **Aristotele** si conformi alla seconda ipotesi: le definizioni sono abbreviazioni di scrittura tutte eliminabili in favore dei termini primitivi, non importa il grado di "complicazione" raggiunto da una definizione, cioè quanto essa sia "lontana" dai termini primitivi, essa può essere sempre eliminata. Una definizione in cui intervengano enti che verranno definiti in seguito, anche se ciò potrebbe essere causa di circoli viziosi, è da ritenersi accettabile, purché sia possibile ricondurla ai termini primitivi.

Il procedimento genetico è invece necessario se si attribuisce alla definizione un ruolo fondante della conoscenza. Esso è giustificato dalla richiesta di evitare i circoli viziosi che minerebbero la fiducia che solitamente si ripone in una scienza deduttiva anche perché introdurrebbero l'infinito.

Da un altro punto di vista, la scelta di termini primitivi e di assiomi conferisce un significato convenzionale alla conoscenza scientifica, o almeno alla sua presentazione in forma comunicabile.

Nel *convenzionalismo* ricade ogni dottrina secondo cui la verità di una proposizione o di un insieme di proposizioni fisiche o matematiche dipende sempre da un precedente accordo (esplicito o tacito) stipulato da coloro che devono far uso di queste proposizioni. L'accordo può riguardare direttamente le proposizioni in questione (e ciò accade nella scelta delle assunzioni iniziali di un sistema deduttivo, siano esse assiomi o termini primitivi) o può riferirsi indirettamente ad esse tramite regole inferenziali opportune sulla cui base viene accettata o rifiutata la verità delle proposizioni. Nel convenzionalismo, pur ispirato o motivato dall'esperienza, l'esperienza stessa viene negata in modo assoluto in quanto la possibilità di decidere circa la verità della scelta di un gruppo di assiomi deve obbedire soltanto al postulato di deduttività.

Il convenzionalismo non ha bisogno di dichiarare la propria posizione a riguardo del finito e dell'infinito, in quanto entrambe potrebbero essere mere convenzioni.

Il problema dell'infinito è ben presente ad **Euclide** ed egli fa tutto per evitarlo. Così nella definizione XIV del libro I

> «Figura è ciò che è compreso da uno o più termini.»

stabilisce che le figure sono tutte al finito. Poi nel postulato II afferma

> «E che una retta terminata (πεπερασμένην) si possa prolungare continuamente in linea retta.»

introducendo così le rette, che in realtà faremmo meglio a pensare come segmenti comunque prolungabili, infiniti in senso potenziale. E' diverso il quinto postulato che richiede esplicitamente il prolungamento illimitato di due rette (segmenti) e per questo verrà il più possibile "evitato" nella trattazione successiva. Ancora in altro contesto, nei libri VII, VIII e IX vengono abbandonati gli enti geometrici in favore dell'Aritmetica ed utilizzando procedimenti che fanno uso dell'infinito. Ad esempio nella Proposizione I del libro VII applica il procedimento della discesa finita :

> «Se si prendono due numeri disuguali e si procede a sottrazioni successive, togliendo di volta in volta il minore dal maggiore, la differenza dal minore e così via, se il numero che rimane non divide mai quello che immediatamente lo precede, finché rimanga soltanto l'unità, i numeri dati all'inizio saranno primi tra loro».

La discesa è "rivelata" dalla locuzione «e così via». Qui si vede che il procedimento termina, comunque presi i due numeri, dopo una reiterazione finita dei passi. Ma questa richiesta è appunto il principio della discesa finita che è equivalente al *Principio di induzione*.

Nella Proposizione 20 del libro IX si legge

> «I numeri primi sono di più che ogni proposto numero complessivo di numeri primi»

in piena sintonia con la posizione di **Eudosso** di alludere all'infinito senza mai nominarlo. E' interessante osservare che la dimostrazione è condotta con soli tre numeri primi, forse perché quanto viene detto potrebbe essere ripetuto senza troppe modificazioni per un numero maggiore (finito) di numeri primi. Questa proposizione potrebbe essere interpretata in due modi: l'insieme dei numeri primi è (potenzialmente) *infinito* oppure l'insieme dei numeri primi è *illimitato*. Non è detto che la distinzione tra questi due termini sia esprimibile nella lingua greca, così come avviene nelle lingue contemporanee.

10. Infinito nella tarda Filosofia greca e nei pensatori cristiani.

Torniamo alla filosofia greca successiva ad **Aristotele** per riconoscere all'infinito (in atto) aspetti positivi.

Epicuro ritiene che l'infinito è il principio positivo del divenire dei corpi, mentre il principio negativo è il vuoto. Questa affermazione sarà ripresa dalla religione e dalla mistica che attribuiranno un significato ontologico all'infinito.

Prima però **Plotino**, nel tentativo di conciliare le differenti posizioni della filosofia a lui precedente attribuirà all'infinito la funzione di "recipiente" della molteplicità formale ed in questo senso l'infinito viene ad assumere la stessa funzione della materia (talora viene detto *materia intelligibile*).

Per **Proclo** (410 - 485) è un controsenso chiamare *limite* la forma dell'infinità e chiamare l'*infinito* la materia del limite. Per lui però l'infinito assume ancora un connotato potenziale laddove si espande per gradi a partire dagli intelligibili, al divenire che in sensi diversi appartiene all'anima, ai cieli, alle specie animali, alla variabilità infinita. Altrove però lo stesso **Proclo** sembra propendere per l'infinito attuale, soprattutto quando riconduce finito ed infinito all'Uno ed afferma (in *Elementa theologica*)

> «Tutto ciò che esiste in qualche modo consta di finito e di infinito, per effetto del primo essere … [poiché] è chiaro che l'essere primo comunica a tutte le cose il limite assieme all'infinità, essendo esso stesso composto di questi».

A partire da **Clemente Alessandrino** (150 - 215 d.C.) in poi, riprendendo posizioni di **Plotino**, l'infinito viene visto nella filosofia cristiana come un attributo divino. Esso viene applicato in senso positivo alla divinità ed in senso negativo alla nostra incapacità di cogliere la divinità nella sua ineffabilità.

Poi l'infinito diviene sinonimo di pienezza della divina perfezione, come in **S. Basilio Magno** (330 - 379). Da questo punto in poi l'infinito viene sempre citato in connessione con gli attributi divini e i filosofi si preoccupano di dimostrare per vie diverse tale qualità dell'Essere Supremo.

Molte di esse sono state raccolte nel secolo scorso dal gesuita C. Gutberlet in *Das Unendliche, metaphysisch und mathematisch betrachtet* (1878).

E' interessante osservare che inizia a distinguersi l'infinito in senso spaziale e quello in senso temporale, nonché in senso dinamico.

Ritorna però la questione dell'infinito in atto o in potenza. **Sant'Agostino** non ha dubbi sull'infinità in atto dell'insieme dei numeri naturali: in *La Città di Dio*, dice:

> «Riguardo poi all'altra loro teoria che neanche con la scienza di Dio può essere rappresentato l'infinito, rimane loro che osino affermare, immergendosi nell'abisso profondo della irreligiosità, che Dio non conosce il tutto del numero…Non lo potrebbe dire neanche il più insensato…che razza di omucci siamo noi che pretendiamo di porre limiti alla sua scienza?»

In questa citazione **Sant'Agostino** sembra sostenere che Dio deve conoscere ogni numero naturale e deve conoscere anche la "infinità" intesa come la riunione in un tutto dei numeri naturali «il tutto del numero», perché altrimenti l'insieme dei numeri naturali porrebbe limiti alle sue capacità. Così facendo giustifica, o "dimostra" l'esistenza dell'insieme infinito dei numeri naturali.

11. Infinito nella filosofia medievale.

In seguito è importante la distinzione tra infinito filosofico ed infinito matematico. Già **Ruggero Bacone** (1214 - 1292) provava l'equipotenza tra due segmenti diversi, ripresa poi da **Galilei**, e l'eguaglianza di due qualunque semirette, anche se una è contenuta nell'altra. La conclusione è che l'infinito matematico in atto non è logicamente possibile.

S. Tommaso ammette la possibilità di una moltitudine infinita attuale di esseri spirituali, anche se altrove afferma con decisione che l'unico infinito attuale è Dio mentre riserva l'infinito in potenza alle cose e di conseguenza riserva all'infinito matematico solo l'aspetto potenziale. In *Summa Theologiae* si trova:

> «… l'essere stesso tra tutte le cose è quanto di più formale si possa trovare. Quindi siccome l'essere divino non è ricevuto in un soggetto, ma Dio stesso è il suo proprio essere sussistente, come si è sopra dimostrato, resta provato chiaramente che Dio è infinito e perfetto».

Poco oltre afferma:

> «Quindi, come Dio, nonostante abbia una potenza infinita, tuttavia non può creare qualcosa di increato (il che sarebbe far coesistere cose contraddittorie), così non può creare cosa alcuna che sia assolutamente infinita»

ed inoltre

> «L'esistenza di una molteplicità attualmente infinita è impossibile. Infatti ogni molteplicità appartiene necessariamente a una qualche specie di molteplicità: ora le specie di molteplicità corrispondono alle specie dei numeri: d'altra parte nessuna specie del numero è infinita, perché ogni numero non è altro che una molteplicità misurata dall'unità. Perciò è impossibile che si dia una molteplicità infinita in atto, sia *per se* che *per accidens*. Ancora, la molteplicità esistente nella natura delle cose è creata: tutto ciò che è creato è compreso sotto una certa intenzione del Creatore, altrimenti l'agente opererebbe invano: quindi è necessario che tutti gli esseri creati siano compresi sotto un numero determinato. E' dunque impossibile una moltitudine attualmente infinita, anche solo *per accidens*.».

In questo importante ultimo brano, citato ed annotato da **Cantor** nel saggio *Contributi alla teoria del trasfinito*, viene posto il problema dell'infinito nel Mondo in connessione con l'infinito in matematica. Dice **S. Tommaso** che un insieme (molteplicità) infinito può esistere solo se vi sono numeri infiniti. Probabilmente intende riferirsi ai numeri naturali e quindi ha in mente un confronto con un insieme numerabile. La forma dell'argomentazione è tale che non c'è neppure bisogno di di-

scutere dell'inesistenza di numeri infiniti, in quanto un numero è associato ad una misura (e qui ritorna, più o meno esplicitamente, il Principio di **Eudosso**-**Archimede**).
La seconda obiezione è meno chiara. In essa è chiaro il finalismo della teologia tomistica, ma come questo possa portare all'impossibilità dell'infinito in atto si può forse comprendere solo in relazione alle prove dell'esistenza di Dio, in quanto se non si affermasse l'esistenza di Dio, si finirebbe col postulare un processo all'infinito che toglierebbe la ragione d'essere agli enti sensibili.
Vi è però una affermazione di **S. Tommaso** che sembra contraddire quanto detto sopra. Egli ritiene logicamente possibile che vi sia un infinito maggiore di un altro. Gli esempi che propone in realtà sono di insiemi infiniti equipotenti.
Il poco successivo **Nicola di Autrecourt** (1300 ca. - m. dopo il 1350) ispirato alle tesi del nominalismo respinge sia l'infinito in atto che quello in potenza ammettendo che il continuo sia composto di infiniti *indivisibili*, raggiungibili solo con procedimenti di divisioni ripetuti infinite volte.

12. Infinito nel Rinascimento.

Nicola **Kreb** da Cues (**Cusano**) identifica l'*infinito reale*, attributo divino, con l'*infinito matematico*, aderendo così alla teoria attuale. Soltanto attraverso l'esperienza mistica e quella matematica si può tentare la comprensione della *coincidentia oppositorum* tra Dio e il Mondo, tra finito ed infinito, tra *esse* e *posse*. Il tema della *coincidentia oppositorum* spinge **Cusano** ad assimilare la retta ad una circonferenza di raggio infinito, a ritenere che i procedimenti logici, quali il *terzo escluso* cessino di valere all'infinito.
Giordano **Bruno** (1548 - 1600) riprende le idee di **Cusano** ed è influenzato dalle teorie di **Copernico** (1473 - 1543): l'infinito diviene il fondamento dell'universo. L'infinità si trasferisce così da Dio alla numerosità dei mondi. **Bruno** cerca poi di accordare la visione attuale con quella potenziale, in nome della *coincidentia oppositorum*, nonché del finito e dell'infinito. **Bruno** anticipa speculazione metafisica nel pensiero moderno e l'infinito va a confluire nell'idea di *sostanza* (**Spinoza**), di *Io puro* (**Fichte** (1762 - 1814)) di *Assoluto* (**Schelling** (1775 - 1854)) e di *Spirito* (**Hegel**). Resta il problema della partecipazione del finito all'infinito.
Nella pittura del Rinascimento si sviluppa prospettiva, che rende più "realistica" la rappresentazione pittorica. I punti di fuga rappresentano l'infinito come punto comune delle rette parallele.
In questi stessi anni si sviluppa la pittura del Rinascimento, affrontando il tema della prospettiva. La scoperta di questa tecnica, rendendo più "realistica" la rappresentazione pittorica, introduce i punti di fuga, la rappresentazione dell'infinito come punto comune delle rette parallele. La possibilità di rappresentare l'infinito su una tela o parete non spaventa più l'artista rinascimentale. Nella pittura

medievale, l'identificazione dell'infinito con Dio portava a rinunciare ad una visione prospettica, ma anche nel caso in cui questa sia presente, ad esempio nell'*Annunciazione* dipinta nel 1344 Ambrogio **Lorenzetti** (notizie dal 1319 al 1347) il punto di fuga delle mattonelle rappresentate come pavimentazione concorre in una zona ricoperta dal fondo d'oro, l'unico materiale che si addicesse alla Divinità.

Però ancora un secolo dopo L.B. **Alberti** (1404 - 1472) scriveva

> «sunt qui […] aurum putant quandam historia afferre maiestatem. Eos ipse plane non laudo.»

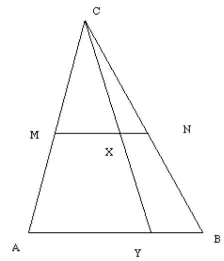
a riprova che ancora l'oro (ad esempio da Masolino da Panicale (1383 - 1447), che aveva collaborato con Masaccio) veniva usato per rappresentare un infinito contemporaneamente divino e geometrico.

13. Galileo Galilei e l'infinito.

Galileo **Galilei** si occupa dell'infinito soprattutto in connessione col *metodo degli indivisibili.* Egli riprende l'impostazione di **Democrito**, così come riportata da **Plutarco**, estesa però dalla Geometria a classi più ampie di problemi analitici. L'ultima opera, *Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze,* del 1638, comprende la maggior parte delle considerazioni del pisano sui paradossi dell'infinito. Alcune considerazioni di Geometria lo portano a cogliere che l'infinito può entrare in collisione con la VIII nozione comune di **Euclide** (riecheggiando i problemi posti già da Platone nel *Carmide*).

> «Ed il tutto è maggiore della parte»

Basta disegnare un triangolo e vedere che tra il lato *AB* ed il segmento *MN* che congiunge i punti medi degli altri due lati, deve esistere una corrispondenza biunivoca, ottenuta congiungendo i punti di *AB* con *C* ed intersecando con *MN*, contro il fatto che *AB* abbia lunghezza doppia di *MN*



L'intuizione porta però a considerare che le lato *AB* vi siano un numero maggiore di punti che in *MN*. Così nasce il paradosso, perché *AB* dovrebbe al contempo essere maggiore di una sua parte (*MN*) ed avere lo stesso numero di punti di essa.

> «Queste son di quelle difficoltà che derivano dal discorrere che noi facciamo col nostro intelletto finito intorno agli infiniti, dandogli quelli attributi che noi diamo alle cose finite e terminate; il che penso sia inconveniente, perché stimo che questi attributi di maggioranza, minorità ed equalità non convenghino a gl'infiniti, de i quali non si può dire, uno esser maggiore o minore o eguale all'altro.»

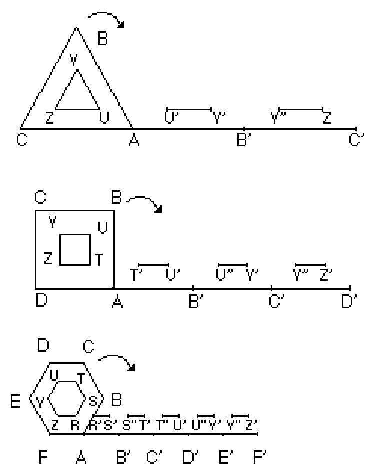
Analoghi problemi si ritrovano dal confronto tra l'insieme dei numeri naturali (positivi) e dal suo sottinsieme dei quadrati perfetti (il cosiddetto *paradosso di Galilei*). Nel brano che segue si prefigura la definizione di insieme infinito, quale sarà presentata in seguito da **Dedekind**:

> «(*Salviati*) - Onde se io dirò, i numeri tutti, comprendendo i quadrati e i non quadrati, esser più che i quadrati soli, dirò proposizione verissima, non è così?
> (*Simplicio*) - Non si può dire altrimenti.
> (*Salviati*) - Interrogando io di poi, quanti siano i numeri quadrati, si può con verità rispondere, loro esser tanti quante sono le proprie radici, avvenga che ogni quadrato ha la sua radice, ogni radice il suo quadrato, né quadrato alcuno ha più di una radice, né radice alcuna più di un quadrato solo.
> (*Simplicio*) - Così sta.
> (*Salviati*) - Ma se io domanderò, quante siano le radici, non si può negare che elle non siano quante tutti i numeri, poiché non vi è numero alcuno che non sia radice di qualche quadrato; e stante questo converrà dire che i numeri quadrati siano quanti tutti i numeri poiché tanti sono quante le loro radici, e radici son tutti i numeri : e pur da principio dicemmo, tutti i numeri esser assai più che tutti i quadrati, essendo la maggior parte non quadrati. E pur tuttavia si va la moltitudine dei quadrati sempre con maggior proporzione diminuendo, quanto a maggiori numeri si trapassa; perché siano a cento vi sono dieci quadrati; in diecimila solo la centesima parte son quadrati, in un milione solo la millesima»

Sembra di sentire parlare **Dedekind**!

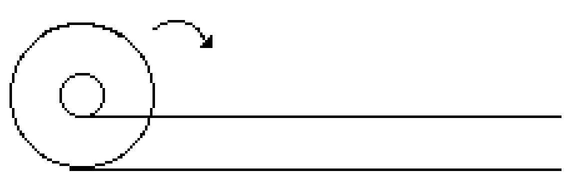
Qui si è in presenza dell'infinito in atto che contrasta con l'intuizione. Ma sono importanti altre considerazioni: per affermare che sono «tanti quanti» si usa una corrispondenza biunivoca, concetto che troverà uso fecondo nelle opere di **Bolzano** (1781 - 1848) e di **Cantor** più di due secoli dopo. A differenza di R. **Bacone** che aveva avanzato considerazioni analoghe, **Galilei** non conclude l'impossibilità dell'infinito, essendo troppo matematico per evitarlo; conclude solo che gli strumenti per trattare finito ed infinito devono essere diversi. Lo studio della "rarefazione" dei quadrati era presente anche nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi*, laddove si accennava alle leggi di caduta dei gravi. La conclusione di non poter applicare all'infinito le consuete operazioni e confronti validi per il finito. Si ha quindi, in questo contesto, la rinuncia ad alla considerazione dell'infinito in atto, che verrà però invece utilizzato ed adottato in pieno a proposito degli infinitesimi.

Di un diverso tipo di infinito, geometrico, il pisano parla considerando il punto a comune di due rette parallele. In questo caso considera il rapporto tra due linee infinite. Anche nel trattare il rotolamento di due poligoni regolari simili solidali concentrici,



il rotolamento facendo perno sul rispettivo vertice di destra fa sì che mentre il poligono esterno descrive un segmento di lunghezza eguale al perimetro del poligono, il poligono interno descrive tanti segmenti quanti sono i lati, la cui somma delle misure eguaglia il perimetro del poligono interno. All'aumentare del numero dei lati i segmenti "superiori" aumentano di numero e diminuiscono sempre più le misure (relative) dei "vuoti" tra i vari segmenti.

Facendo rotolare due cerchi solidali concentrici, **Galilei** si trova una situazione paradossale causata dal considerare la circonferenza come un poligono regolare con infiniti lati, perché in un giro completo della circonferenza esterna, la circonferenza interna descrive un segmento della stessa lunghezza.



Dove sono andati i "buchi", che dovrebbero essere infiniti? I meccanici risolveranno il problema inventando il *rotolamento con strisciamento*.

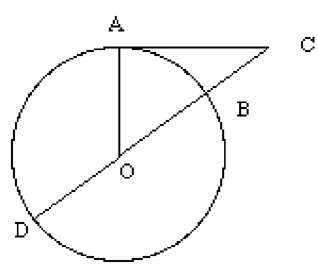
Altrove Galileo afferma a proposito della divisibilità di un segmento:

> «il continuo è divisibile in parti sempre divisibili sol perché consta d'indivisibili; imperò che se la divisione e suddivisione si ha da poter continuar sempre, bisogna necessariamente che la moltitudine delle parti sia tale che già mai non si possa superare; e sono dunque parti infinite, altrimenti la divisione finirebbe; e se sono infinite, bisogna che non siano quante, perché infiniti quanti compongono un quanto infinito, e noi parliamo di quanti terminati; e però gli altissimi, ed ultimi, anzi primi componenti del continuo sono indivisibili infiniti»

Forse spaventato di aver posto l'infinito in considerazioni così "umane" ed applicative, si preoccupa di ristabilire le distanze con la Divinità: nelle opere della natura si riconosce un'infinita sapienza, ad esempio anche nel far crescere una pianta. Dato poi che di queste opere la natura ne compie innumerabili, cioè infinite,

> «talché si può concludere il sapere divino esser infinite volte infinito.»

Come detto prima, l'attenzione del Pisano è rivolta i problemi degli infinitesimi. Nel *Dialogo sopra i due massimi sistemi* presenta un problema geometrico connesso col moto di un corpo, un sasso che viene lanciato facendo ruotare una corda ad esso attaccata, al momento del distacco dalla corda stessa. Il moto del proiettile procede secondo la tangente al cerchio descritto durante la rotazione, nel punto di contatto tra la tangente e la circonferenza stessa, se non si tiene conto della inclinazione dovuta dal suo stesso peso. Se ci si interessa di quello che accade nelle immediate vicinanze del punto di distacco, si può anche trascurare la deviazione prodotta dal peso.

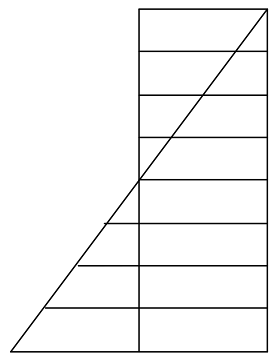


Ora considerando le varie posizioni della retta OC sempre più vicine ad OA, vuole stabilire il rapporto tra i segmenti AC e BC. Tale rapporto è maggiore di 1, infatti per un ben noto teorema di Geometria euclidea, la tangente è media proporzionale tra la secante e la sua parte esterna, vale a dire $CD : AC = AC : BC$. Essendo CD un segmento di lunghezza maggiore di AC, ne discende anche che AC ha lunghezza maggiore di CB. Ebbene **Galilei** dimostra che il rapporto va crescendo, assumendo valori tanto grandi quanto si voglia, pur divenendo i segmenti infinitamente piccoli:

> «(*Salviati*) - di mano in mano che la segante sarà più vicina al contatto, questa proporzione si fa maggiore in infinito»

La possibilità di confrontare grandezze infinitamente piccole (quello che oggi si direbbe un confronto di *infinitesimi*) gli fa parlare di «gradi di tardità», anzi la quiete è il grado di tardità infinita.
L'infinito in atto è poi presente in varie occasioni nell'opera del pisano. Qui per esempio si considera in un teorema sugli spazi percorsi nella caduta dei gravi presentato in *Discorsi e dimo-*

strazioni matematiche ecc.. Egli vuole confrontare il moto uniformemente accelerato con il moto uniforme. Lo spazio percorso con il moto uniformemente accelerato in un certo tempo è eguale allo spazio percorso con moto uniforme nello stesso tempo con velocità costante eguale alla metà della velocità massima raggiunta nel primo moto. Per provarlo considera un diagramma analogo a quello sotto riportato, disposto diversamente rispetto a quello che disegneremmo oggi, quindi con i tempi in verticale e le velocità in orizzontale.



Egli ha condotto tante linee equidistanti parallele e ne considera l'*aggregato*, in latino *aggregatum*, osservando che l'aggregato delle parallele contenute nel rettangolo è eguale all'aggregato delle parallele contenute nel triangolo. Il suo disegno ne presenta sette [5] e l'argomento è indubbio per la somma delle lunghezze tracciate in numero finito a distanza infinita. Ma poi di qui indica di tracciare le parallele per ogni punto del cateto "verticale". Qui dunque, a differenza di quanto aveva propugnato in altro luogo, viene a confrontare due insiemi infiniti in atto e da questo confronto trae la dimostrazione del suo teorema.

Un altro importante passo in questa direzione viene compiuto da Bonaventura **Cavalieri** che in una lettera a **Galilei** annuncia di aver trovato un metodo per la quadratura della parabola, diverso da quello di **Archimede** ed anche da quello proposto dalla stesso **Galilei**, utilizzando

> «tutte le linee di una figura» e «tutti i piani di quel solido»

senza che questi procedimenti possano rientrare nella ordinaria geometria euclidea.

14. Gli indivisibili e il sorgere dell'Analisi.

Come si vede la speculazione matematica va sempre più nella direzione dell'infinito in atto. In Italia si sviluppa negli anni di **Galilei** ed in quelli immediatamente successivi, una scuola di pensiero che si pone l'obiettivo di determinare l'area di varie figure mediante il metodo degli indivisibili (= infinitesimi) rinnovando gli studi di Geometria e trovando risultati che prefigurano il calcolo

[5] numero che nella cultura semitica ha il significato di una quantità indeterminata e grande.

integrale moderno. Qui il tema dell'infinito inizia a mescolarsi strettamente con quello del continuo. Interessante è poi la considerazione di **Torricelli** dei punti impropri delle iperboli.
Con **Cartesio** compare una distinzione tra *infinito*, attributo proprio di Dio e *indefinito*, usato per indicare grandezze illimitate in quantità o in possibilità:

> «diremo indefinite queste cose piuttosto che infinite, sia per riservare il titolo di Infinito a Dio solo, poiché in Lui soltanto da ogni parte, non solo non conosciamo alcun limite, ma anche positivamente comprendiamo che non ve ne sono; sia anche perché non comprendiamo positivamente nello stesso modo che le Altre cose da qualche parte mancano di limiti, ma negativamente soltanto dichiariamo che i loro limiti, se ne hanno, non possono venire trovati da noi»

Dato poi che il finito è pensato come una limitazione dell'infinito, la percezione dell'infinito (di Dio) deve precedere quella del finito (dell'Uomo). L'unica possibilità che è data all'Uomo per comprendere l'infinito attivo è offerta mediante il volontarismo, cioè l'affermazione del predominio della volontà sull'essere come tale, sia in Dio che nell'Uomo. Così il razionalismo metafisico si apre a due punti di vista, uno è la considerazione formale dell'infinito come attributo di Dio, l'altro la concezione dello spirito come attività libera e come causa di se stessa. Si fa senza dire che la speculazione filosofica successiva adotterà spesso questo secondo aspetto in modo predominante sul primo.
Contemporaneamente Blaise **Pascal** (1623 - 1662) sembra propendere per l'infinito in atto. Dice infatti in un pensiero (232) [6]:

> «Il movimento infinito, il punto che riempie tutto, il momento del riposo: infinito senza quantità, indivisibile e infinito»

Nel pensiero successivo, uno dei più lunghi, cui **Pascal** ha posto un titolo significativo: *Infinito. Niente*, afferma in varie passi

> «L'unità aggiunta all'infinito non l'accresce di niente… Il finito si annienta di fronte all'infinito e diventa un puro niente… Noi sappiamo che c'è un infinito e ne ignoriamo la natura. Poiché sappiamo che è falso che i numeri sono finiti, è vero dunque che c'è un infinito nel numero. Ma non sappiamo che cosa è; è falso che sia pari; è falso che sia dispari, infatti aggiungendo l'unità non cambia natura; tuttavia è un numero e ogni numero è pari o dispari (e questo veramente s'intende detto per ogni numero finito))…Noi dunque conosciamo l'esistenza e la natura del finito perché siamo finiti ed estesi come lui. Conosciamo l'esistenza dell'infinito e ignoriamo la sua natura, perché ha estensione come noi ma non ha confini come noi. Ma non conosciamo né l'esistenza né la natura di Dio, perché non ha estensione né confini. Però mediante la fede conosciamo la sua esistenza…»

Il pensiero continua poi con l'esposizione della teoria della scommessa su cui basare la propria scelta teologica. Come si vede qui si presenta una distinzione tra l'aspetto religioso e quello conoscitivo, che sarà ripresa in seguito da altri pensatori.

---

[6] Nell'edizione Brunschvicg.

In un commento ad idee di **Spinoza**, **Leibniz** propone tre specie di infinito: *infimo*, nella quantità, *medio*, come totalità di spazio e tempo e *massimo*, che è Dio soltanto, come fusione di ogni cosa in uno. In contrapposizione a **Locke**, afferma la priorità e positività dell'idea di infinito in quanto non può essere derivata dall'esperienza, ma è ciò che sorregge il processo dell'esperienza. Qui evidentemente si parla di infinito non in senso matematico, ma **Leibniz** giustifica con considerazioni matematiche la sua posizione. Infatti data una linea di una certa lunghezza si può subito pensare ad un'altra simile di lunghezza doppia e viceversa una simile di lunghezza la metà, così pure un segmento può essere allungato o accorciato all'infinito. Così l'idea d'infinito nasce dall'idea di somiglianza della parte con il tutto o dall'identità e quindi è la stessa delle verità necessarie ed universali. Così l'assoluto e le varie forme di infinito, insite nel nostro spirito, non sono altro che gli attributi di Dio e sono la fonte delle idee, così come Dio è il principio delle essenze. In una lettera a **Des Bosses** dichiara che propende per l'infinito in atto, ma al di sopra sia dell'infinito in atto massimo e minimo, sta Iddio che è unità indivisibile. L'infinito in atto è sottinteso poi nel principio della monade.

15. L'infinito in Spinoza, Kant e nell'Idealismo.

Per **Spinoza**, la trasformazione della sostanza fino all'identificazione con Dio, cioè della *res cogitans* e della *res extensa,* gli fa ritenere Dio un ente assoluto ed infinito, con infiniti attributi, ma è un'idea statica. E' un infinito che lascia fuori di sé il molteplice e il diverso dell'esperienza, ma è un infinito in atto. Anzi si può dire infinito solo ciò che è incapace di ulteriore accrescimento.

Le idee di Spinoza forse traggono origine da un pensatore medievale, come provato dagli studiosi di questo secolo. Certamente il ritorno dei molti all'Uno, dei diversi all'identico, che coincide con la libertà divina è il nuovo concetto dell'infinito positivo e onnicomprensivo, diverso sia da quello di origine cosmologica del pensiero greco, sia dallo spiritualismo cristiano basato sulla trascendenza di Dio e sulla libertà umana.

A **Kant** si deve una presentazione delle antinomie legate all'infinito, antinomie che richiedono tutte serie infinite e un *regressus* o *progressus in infinitum*. Esse nascono da ritenere infinita l'estensione del Mondo nello spazio e nel tempo, una serie infinita di nessi causali di causa ed effetto. A queste posizioni si ribatte che il Mondo è finito nello spazio ed ha avuto un inizio nel tempo. L'infinita indivisibilità della materia contrasta con la presenza dell'atomo indivisibile. La catena delle cause non è infinita, ma ha una causa prima, Dio. Tutte queste situazioni paradossali sono originate dalla pretesa dell'intelletto umano di trascendere l'esperienza anche quella solo possibile, anche attraverso una intuizione in quanto questa capacità umana di intuire è in grado di abbracciare solo il particolare, mai il Tutto in sé. Questa intuizione è propria solo di Dio, non dell'uomo. Così per **Kant** l'uomo

può pensare con coerenza il finito e di fronte all'infinito si avvolge in contraddizioni irresolubili. La sua posizione è quindi più spostata verso l'infinito potenziale.
L'idealismo trascendentale che muove dalla totalità dell'unica sostanza spinoziana è proteso alla conquista teoretica dell'infinito come del vero in-sé del reale. La contemporanea presenza di una più o meno evidente dualità porta ad identificare nell'infinito gli opposti. Così per **Fichte** lo propone come io non-io. F. **Schleiermacher** (1769 - 1834) postula che lo scopo della religione sia la comprensione dell'infinito nel finito. Finalmente con **Hegel** il percorso si può dire compiuto: il finito è un momento ideale e non il vero essere, l'infinito è il reale senza altre specificazioni. La limitatezza che si riscontra in ogni finito rimanda ad un altro finito e così via (aspetto potenziale). **Hegel** la bolla come *cattiva infinità* perché sempre legata al limite del finito. Il limite poi è negazione di altro e questo altro è l'infinito. Così il finito ha per sua verità l'infinito, quindi cioè che il finito è non è lui stesso ma il suo opposto. Ciò spiega perché la manifestazione dell'infinito è data, mediante la dialettica della negazione, dal manifestarsi del finito. Ma il vero essere del finito non è negativo in quanto è costituito dal suo continuo trapassare nell'infinito, ma ciò che è soltanto l'infinito. Si ha pertanto che il finito non è fuori dell'infinito, né l'infinito fuori del finito; sicché non solo il finito non può essere senza l'infinito, ma neanche l'infinito senza il finito. In queste considerazioni **Hegel** sviluppa posizioni di **Kant**, cui si deve l'aver eguagliato il finito all'infinito, nell'intento di ricondurre l'infinito al di qua della speculazione metafisica. Però l'infinito di **Hegel**, a differenza di quello kantiano, è in atto.
Talvolta nei testi filosofici si distingue tra infinito in atto, come l'infinito che è senza fine, utilizzando l'aggettivo *negativo* o *categorematico*, dall'infinito in potenza, detto anche *privativo* o *sincategorematico*.

16. Infinito nelle Scienze.

Prima di passare alla Matematica, che forse è l'aspetto che qui più ci interessa, vediamo l'uso dell'infinito nelle altre scienze. Quella apparentemente più vicina all'infinito è la cosmologia, cioè la scienza che studia e descrive l'Universo come spazio, tempo e materia, lasciando alla ontologia ed alla teologia i problemi relativi alla natura intrinseca dell'Universo stesso ed il suo fine ultimo. Abbiamo notizie della cosmologia babilonese egizia ed ebraica, attraverso monumenti e testi, anche se in questa fase essa è strettamente connessa con problemi teologici e religiosi. Sarà ancora così nel primo pensiero greco, in particolare in **Aristarco di Samo**, che dalla ipotesi della rotazione della Terra attorno al Sole e dalla "fissità" delle stelle deduce che esse devono essere collocate ad infinita distanza dalla Terra. Le idee di **Aristarco** saranno "censurate" probabilmente proprio per la considerazione di un infinito immanente. La teoria predominante, quella di un Universo chiuso e finito propugnata da **Aristotele** si evolverà nella cosmologia tolemaica (II secolo d.C.) in cui la Terra viene posta al centro dell'Universo, immobile, attorno alla quale ruotano i pianeti. Questa visione, come si diceva, è fortemente condizionata dalla idee aristoteliche e presenta così i problemi dell'ultimo cielo, quello delle stelle fisse, visto come confine dell'Universo. Contemporaneamente nasceva il problema di cosa c'era al di là di dato limite. **Occam** propone un Universo infinito. Su questa linea si muovono poi **Cusano** e **Bruno**, come precedentemente detto. L'ipotesi tolemaica viene sostituita da quella copernicana, ma permane l'accettazione dell'Universo infinito. Con **Laplace** viene portata al massimo la visione meccanicistica dell'Universo, come una macchina descrivibile mediante strumenti matematici sostanzialmente infinita nel tempo e nello spazio. Oggi, dopo l'introduzione della teoria della relatività, l'universo è visto come un sistema chiuso e finito, anche se illimitato. Alcune teorie cosmologiche accettano l'ipotesi di un inizio dei tempi e della materia, il *Big Bang*.

Il problema dell'infinito era presente anche nella Biologia, prima di **Linneo**, mescolato a motivi religiosi. Nell'antichità, anzi fino al Rinascimento, è difficile distinguere la Fisica dalla Biologia. Si accredita ad **Aristotele** una certa propensione alla **Biologia** e la si riscontra nella sua attività classificatoria nell'ambito della conoscenza e della filosofia. Alla ripresa degli studi scientifici, forse motivati da esigenze pratiche, i biologi vedono nella natura ed in particolare negli esseri viventi, una manifestazione della potenza divina. Di qui a teorizzare che le specie viventi siano infinite il passo è breve. Questa posizione è di ostacolo ad una sistemazione complessiva delle conoscenze nel campo. Il rifiuto dell'infinito in atto da parte di **Linneo**, lo spinge a ricercare uno strumento organico di classificazione di animali e vegetali, usando una doppia denominazione. Il successo del suo tentativo e l'agilità del metodo sarà poi di base alla biologia moderna.

17. Infinito in Matematica.

Ma veniamo ora all'accezione matematica dell'infinito. Come già si è palesato precedentemente, all'inizio il concetto di infinito aveva connotati cosmologici e filosofici, religiosi ed anche matematici mescolati. A lungo il pensiero in una di queste diverse accezioni ha influenzato le altre. Con **Pascal** e l'idealismo, le varie interpretazioni hanno preso corpo e si sono accentuate le distanze reciproche. I matematici però spesso hanno operato con l'infinito senza porsi problemi sulla sua natura, almeno esplicitamente. Quando P. **Fermat** (1601 - 1665), **Newton**, **Leibniz** ed altri introducono il calcolo differenziale, abbandonando così lo stile geometrico a favore dell'indagine analitica, l'infinito è presente, ma non viene esplicitamente sviscerato. Grandi matematici come **Eulero** e i **Bernoulli** (XVII - XVIII sec.) usano con disinvoltura serie e limiti, senza una salda base che possa giustificare appieno i loro risultati.

Sono abbastanza semplici esempi di questa situazione, l'uso di serie divergenti o indeterminate e l'applicazione ad esse di proprietà non applicabili. Così dato che la serie geometrica (con ragione x tale che $|x| < 1$) è convergente, $\sum_{h=0}^{\infty} x^h = \frac{1}{1-x}$, applicare la formula senza le limitazioni dette, fornisce i risultati assurdi (**Eulero**) $\sum_{h=0}^{\infty} 2^h = \frac{1}{1-2} = -1$, vale a dire la somma di infiniti numeri positivi è un numero negativo. Se invece si pone $x = -1$, la formula fornisce per la cosiddetta serie di Guido **Grandi** (1671 - 1742) $\sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$. Ma sfruttando la proprietà associativa in modo diverso, proprietà che oggi sappiamo non applicabile, si può scrivere l'ultima serie in due modi diversi:

$1 = \sum_{h=0}^{\infty} (-1)^h$ = 1 + (-1+1) + (-1+1) +… = (1-1) + (1-1) + … = 0, ottenendo così $\frac{1}{2} = 1 = 0$. Si noti l'importanza del passaggio tra la notazione moderna di serie, col simbolo di sommatoria, che richiede un insieme infinito, e la scrittura con i puntini, che suggerisce un infinito potenziale. Entrambe sono utilizzate in Matematica, anche oggi. Chiaramente la proprietà associativa dell'addizione è valida al finito, dunque una visione potenziale trova difficile accettarne la non validità.

Non che mancassero le critiche, ad esempio **Berkeley** in *L'Analista: discorso ad un matematico infedele* mette in guardia dall'uso degli infinitesimi, per lui solo idee astratte destinate a portare a contraddizioni. Per contro J.B. **D'Alembert** (1717 - 1783) spronava la ricerca con l'invito: «Allez en avant, la fois vous viendra».

Un sentore delle difficoltà che un concetto non chiaro di infinito può portare in Matematica è testimoniato dal concorso bandito dall'Accademia di Berlino (sotto la presidenza di G.L. **Lagrange** (1736 - 1813)) per un lavoro che chiarisse il concetto di infinito in Matematica. Il vincitore S. **L'Huilier** (1750 - 1840) propugna un ritorno all'infinito classico, aristotelico, contro l'accettazione dell'infinito in atto che trovava il suo propugnatore in **Leibniz**.

La polemica tra atto e potenza continua poi e continua tuttora. Ad esempio si può leggere l'opera di sistemazione dell'analisi partita da A.L. **Cauchy** (1789 - 1857), con la cosiddetta ε-δ definizione di K.T. **Weierstrass** (1815 - 1897), come un definitivo abbandono dell'infinito in atto nella Matematica in favore dell'infinito potenziale. La definizione di limite, su cui *Cauchy* basa l'Analisi, diventa centrale e portante per gli altri concetti che usano l'infinito: continuità, derivate, integrali, serie, nate indipendentemente e prima.

Ma l'infinito in atto ricompare ed acquista un ruolo estremamente importante mediante l'opera di **Bolzano** e di **Cantor** ed attualmente permea tutta o quasi la Matematica dei nostri giorni. Prima di approfondire questa parte più recente e di analizzare anche alcune proposte di superamento della dialettica *atto-potenza*, cerchiamo di vedere alcune delle diverse accezioni con cui l'infinito è presente in Matematica.

18. Presenza dell'infinito in Matematica.

Il problemi del continuo e dei numeri reali sono stati affrontati in altri corsi. La vastità e fecondità delle applicazioni della struttura numerica dei numeri reali spinge spesso a dimenticare che in essi sono coinvolti aspetti assai delicati. Essi offrono un esempio di insieme infinito in atto, per definire il quale, almeno con le proprietà che si riscontrano sui libri di testo dalle medie in su, è necessario utilizzare ancora l'infinito in atto. Sono anche l'infinito dell'estensione, considerata l'estensione dal punto di vista astratto della teoria della misura. Richiamo brevemente cosa si intende per misura, anzi per *spazi di misura*.

DEFINIZIONE. Una famiglia A di insiemi si dice un *anello di insiemi* o *algebra di insiemi* se presi comunque $a,b\in A$, si ha $(a\cup b)\in A$ e $(a-b)\in A$.

Se inoltre per ogni $r\in \mathbb{N}$, è dato un elemento $a_r\in A$, e si ha $\left(\bigcup_{r\in N} a_r\right)\in A$, allora A è detto un *σ-anello* o una *σ-algebra*.

DEFINIZIONE. Sia A un anello di insiemi. Una funzione $\mu\colon A\to \mathbb{R}^{0+}$ si dice *additiva* se per ogni $a,b\in A$ tali che $(a\cap b)=\emptyset$, si ha $\mu(a\cup b)=\mu(a)+\mu(b)$.

Si dice che μ è *numerabilmente additiva* (o *σ–additiva*) se considerata una famiglia numerabile $a_r\in A$ di insiemi, indiciata da $\mathbb{N}$, tale che per ogni $h,k\in \mathbb{N}$ distinti, $(a_h\cap a_k)=\emptyset$, si ha $\mu\left(\bigcup_{r\in N} a_r\right)=\sum_{r\in N}\mu(a_r)$, intendendo che la serie a secondo membro possa anche divergere positivamente.

DEFINIZIONE. Sia X un insieme, si dice che X è uno *spazio di misura*, se esiste un σ-anello M di sottinsiemi di X (detti insiemi *misurabili*) e una funzione $\mu\colon M\to \mathbb{R}^{0+}$, numerabilmente additiva, che viene chiamata *misura.*

La definizione di spazio di misura ha un sapore di circolarità: sono misurabili tutti e soli i sottinsiemi per i quali esiste la misura; inoltre essa fa intervenire l'infinito, in due modi diversi. Per parlare di σ-anello e di numerabile additività si devono considerare insiemi infiniti in potenza di insiemi misurabili, poi serve un diverso tipo di infinito che ha i connotati di un numero, ma non è un numero reale. E' interessante osservare che queste stesse definizioni vengono utilizzate da **Kolmogorov** per definire la probabilità. La presenza di questi due tipi di infiniti viene però osteggiata dalla versione soggettivista della probabilità, elaborata da B. **De Finetti** (1906 - 1985) sulla base di considerazioni filosofiche e fondazionali.

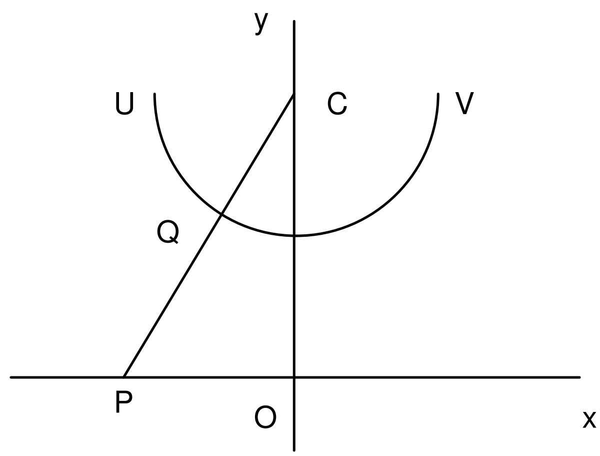
Nella definizione di spazio di misura in qualche senso non compare esplicitamente il σ-anello. Potrebbe nascere il problema di vedere quali sono in σ-anelli contenuti nell'insieme delle parti. Ci sono sempre due esempi, in certo senso estremi. Il primo è l'insieme vuoto ∅. Le condizioni per provare se si tratta di un anello, anzi σ-anello di insiemi sono verificate perché sono richieste di tipo universale. L'altro esempio canonico è quello dell'insieme delle parti. E' banalmente un σ-anello. Ma cercare di definire su esso una misura porta appunto al teorema di **Ulam** (1909 - 1984) che fornisce una conseguenza sorprendente dell'infinita estensione di $\mathbb{R}$. Esiste ed è unica una misura μ su $\mathbb{R}$ che gode delle seguenti due proprietà: per ogni $x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$ e ogni sottinsieme di $\mathbb{R}$ è misurabile. Il fatto che la misura di un singoletto sia nulla è altrettanto facile da giustificare intuitivamente. Ebbene **Ulam** prova che tale misura è quella per cui ogni sottinsieme $a \subseteq \mathbb{R}$ ha misura nulla; ma tra i sottinsiemi di $\mathbb{R}$ c'è lo stesso insieme di numeri reali, che così viene ad avere misura nulla.

In questo esempio di uso dell'infinito si è già parlato del "numero" reale infinito. Si tratta di un infinito di natura topologica. L'insieme dei numeri reali con la topologia indotta dalla metrica naturale: $d(x,y) = |x - y|$, è completo rispetto alla convergenza di successioni di **Cauchy**, ma non offre il limite per successioni divergenti.

L'uso dei simboli di infinito: ∞, $+\infty$ e $-\infty$ merita un poco di riflessione. Sicuramente tali simboli non individuano un numero reale. Per trattare l'infinito bisogna allora estendere i numeri reali con tali nuovi simboli, ma l'estensione non è unica. Qui si suggeriscono due possibili estensioni, quella con l'unico simbolo ∞ e quella con $+\infty$ e $-\infty$. La scelta non è "indolore". Se si aggiunge un unico simbolo ∞, allora si "rischia" di perdere l'ordine su $\mathbb{R}$, cioè non c'è modo di ampliare l'ordine naturale su $\mathbb{R}$ in modo da tenere conto anche di ∞ in quanto tale valore infinito è raggiungibile sia "crescendo" che "decrescendo". La presenza di due infiniti permette di mantenere l'ordine naturale e di interpretare i due simboli come il minimo ed il massimo di $\mathbb{R}$, o meglio di $\mathbb{R}$ esteso. Il fatto poi che mediante il valore assoluto si passi da ∞ a $+\infty$ permette di vedere il valore assoluto come la "traduzione" dell'ampliamento con un unico infinito nell'ampliamento con due infiniti.

In realtà questa discussione è sospetta: infatti la nozione di divergenza per successioni, funzioni e serie è posta proprio per evitare di parlare esplicitamente di ∞, di $+\infty$ e di $-\infty$. La definizione fa intervenire solo i numeri reali. Non c'è dunque modo, restando in $\mathbb{R}$, di distinguere quale sia l'ampliamento considerato. Tale ambiguità è tuttavia una ricchezza dato che di volta in volta si può decidere in base ad uno specifico problema, il tipo di ampliamento richiesto.

Si può presentare il problema anche in termini geometrici. Si consideri una biezione tra i punti di una retta ed una semicirconferenza (privata degli estremi), realizzata mediante proiezioni e sezioni come nella seguente figura



Se si desiderano equazioni cartesiane delle linee rappresentate, si consideri la semicirconferenza

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 \\ y < 2 \end{cases}$$

Le rette che interessano sono tutte quelle passanti per il punto C, ad esclusione della retta $y = 2$, che interseca la circonferenza nei punti U e V, esclusi dalla seconda disequazione. L'equazione della generica retta del fascio è data da $ax + b(y - 2) = 0$, con a, b non contemporaneamente nulli. Anzi, volendo evitare la retta detta, si trova $a \neq 0$. Con queste posizioni, il punto sull'asse delle ascisse ha coordinate $P \equiv \left\langle \frac{2b}{2}, 0 \right\rangle$ mentre il punto corrispondente sulla semicirconferenza è $Q \equiv \left\langle \frac{b\,|a|}{a\sqrt{a^2+b^2}}, 2 - \frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\rangle$. Se si vuole estendere la corrispondenza biunivoca a tutta la semicirconferenza, viene naturale associare al punto U il valore $-\infty$ ed al punto V il valore $+\infty$.

Una diversa corrispondenza biunivoca può aiutare a rappresentare il valore ∞ senza segno. Si consideri, sempre la corrispondenza realizzata sempre mediante sezioni, tra una circonferenza privata di un punto.

L'equazione della parte di circonferenza interessata è data ora da

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 \\ y < 3 \end{cases}$$

e si considerano le intersezioni con la retta $ax + b(y - 3) = 0$, sempre con $a \neq 0$. Come prima si associa al punto $P \equiv \left\langle \frac{3b}{a}, a \right\rangle$ il punto $R \equiv \left\langle \frac{2ab}{a^2+b^2}, \frac{3b^2+a^2}{a^2+b^2} \right\rangle$, individuando in tal modo una corrispondenza biunivoca. In questo caso per estendere la corrispondenza a tutta la circonferenza basta aggiungere un unico valore, ∞, come il corrispondente del punto $S \equiv \langle 0,3 \rangle$.

Si è già citata la rappresentazione dell'infinito al finito operata dalla prospettiva, nonché della considerazione dei punti all'infinito delle iperboli. Matematicamente si riesce a parlare di tale tipo di infinito evitandolo accuratamente. Ciò avviene in Geometria affine, con l'introduzione delle coordinate omogenee. L'idea fondamentale del metodo delle coordinate, quella di istituire una corrispondenza biunivoca tra punti del piano (dello spazio) e coppie (terne) ordinate di numeri reali, viene in parte rivoluzionata, considerando una corrispondenza biunivoca tra i punti e le classi di equivalenza di terne (quaterne) ordinate, secondo un'opportuna relazione.

Tale costruzione è ben nota, ma si trae spunto da essa per mostrare un esempio di interesse didattico riferito al caso delle coordinate omogenee sulla retta. In questo caso si associa ad ogni punto della retta un solo numero (la coordinata del punto una volta fissato un sistema di riferimento sulla retta) oppure una coppia ordinata, soggetta alla condizione che entrambe le coordinate non siano nulle. Ma a sua volta la coppia ordinata può essere associata ad un punto del piano. Si istituisce così una corrispondenza tra punti della retta e punti del piano. E' ben noto che sulle coppie in cui le coordinate non sono contemporaneamente nulle, si individua una relazione di equivalenza, cioè riflessiva, simmetrica e transitiva, ponendo $\langle x,y \rangle \approx \langle z,w \rangle$ se e solo se $xw = yz$.

E' interessante determinare come sono collocati i punti del piano (privato dell'origine) le cui coordinate sono nella relazione $\approx$. Ad esempio se si cercano i punti le cui coordinate sono equivalenti a $\langle 2, \sqrt{3} \rangle$ è facile constatare che sono le soluzioni dell'equazione $x\sqrt{3} = 2y$, cioè tutti i punti allineati con l'origine del riferimento ed il punto dato. La classe di equivalenza è data allora dalla retta passante per l'origine ed un rappresentante della classe stessa. Il punto sulla retta ad esso corrispondente è il punto $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Se ad esempio si vanno a cercare le classi di equivalenza dei punti a coordinate entrambe intere, i punti sulla retta sono i numeri razionali. Si ha così un metodo geometrico per introdurre i numeri razionali, reso possibile da strumenti didattici quali il geopiano. In questa costruzione è presente l'infinito in quanto alla coppia ordinata $\langle 1,0 \rangle$ che non ha entrambe le coordinate nulle, resta associata la classe di equivalenza data dalla retta che funge da asse delle ascisse, e il punto corrispondente sulla retta è ∞. Anche in questo caso non ha senso indicare il segno.

Dell'infinito in analisi matematica si è già detto precedentemente. Esso viene introdotto dall'uso di infinitesimi, gli indivisibili di **Democrito**, **Cavalieri**, **Torricelli**, ecc. in quanto questi indivisibili sono chiamati a costituire con le loro somme o i loro rapporti, quantità finite e perciò non possono esser considerati in numero finito. Estendendo le proprietà algebriche a tali enti, i loro reciproci necessariamente non possono essere né finiti, né infinitesimi, dunque sono infiniti.

Al loro sorgere questi enti erano considerati *attuali*, cioè veri e propri numeri, con una loro algebra, inseriti nel contesto dei numeri reali. La loro presenza ha dato luogo a troppe conclusioni paradossali. Con il processo iniziato da **Cauchy** e portato avanti da Weierstrass l'analisi si è liberata dagli infinitesimi ed infiniti attuali, in favore della notazione ε-δ. Questa soluzione però privilegia l'infinito in potenza. Sempre come esempio di riconduzione al finito si può citare la teoria dell'integrazione secondo **Riemann** (1826 - 1866), basata sul concetto di decomposizione *finita* di un intervallo, che elimina con questa scelta gli indivisibili di **Cavalieri**. Negli anni '60 del XX secolo, basandosi su importanti teoremi di Logica Matematica ed idee di **Skolem** (1887 - 1963), Abraham **Robinson** (1918 - 1974) riesce a dare una teoria coerente in cui trattare infinitesimi ed infiniti attuali mediante l'analisi non-standard. A cavallo tra gli anni '70 e '80 del XX secolo ad opera di W. **Lawvere**, nell'ambito di ricerche di teoria delle categorie, fornisce una trattazione coerente dei procedimenti di "linearizzazione" spesso usati in Analisi e nelle applicazioni, anche se il "prezzo" da pagare è l'abbandono della Logica classica.

Sempre in Analisi vi è un "abuso" dell'infinito: esso compare nel simbolo di serie con lo stesso significato dell'insieme dei numeri naturali; a volte viene assunto come limite di funzioni o successioni, come fosse un numero vero e proprio, infine è presente spesso nelle cosiddette forme indeterminate, con un significato algebrico. Anzi molti studenti, forse troppo abituati a considerare l'infinito come numero, non comprendono più perché l'insegnante si ostini a chiamare forme indeterminate espressioni che potrebbero avere un senso, più o meno misterioso: $\frac{\infty}{\infty}$, 0∞, $\infty - \infty$, anzi quest'ultimo fa sempre 0!

19. Induzione e ricursione. Postulati di Peano.

Un altro procedimento che richiama l'infinito, questa volta solo potenziale, è il principio di induzione matematica, strumento essenziale nelle dimostrazioni aritmetiche e logiche. Il procedimento induttivo non è esclusivo della Matematica ed in essa ha una lunga storia, numerose forme e numerose applicazioni. Alcuni autori attribuiscono il *Principio di induzione matematica* a Giovanni **Campano da Novara** (1220-1296), altri a Francesco **Maurolico** (Sec. XV). Forme diverse di induzione si incontrano però in **Euclide**, come *principio della discesa*, in **Al-Karaji** (sec. XI-XII), in Levi **Ben Gershon** (sec. XIII), ma probabilmente l'autore che più consapevolmente lo enuncia e lo usa è **Pascal** in uno scritto del 1654. Le argomentazioni induttive hanno solitamente la seguente forma: poiché gli oggetti che conosciamo che hanno la proprietà P hanno anche la proprietà Q, qualsiasi altro oggetto che goda di P deve godere anche della proprietà Q. Così dice K. **Popper**, (1902 - 1996) (essendo tutti i cigni europei bianchi, anche i cigni che **Cook** (1728 - 1779) troverà in Australia devono essere bianchi! Questo esempio mostra che il ragionamento induttivo non è logicamente affidabile. Ruggero **Bacone** tenta nel *Novum Organum* di delimitare le regole in base alle quali l'induzione permetterebbe di giungere a leggi generali dall'analisi di casi particolari. D. **Hume** osserva però che il ragionamento induttivo si fonda su una ipotesi soggiacente di uniformità della natura che esprima dunque un rapporto necessario tra causa ed effetto. Oggi, dopo un saggio di R. **Carnap**, viene riconosciuto un rapporto tra induzione e probabilità.

In Matematica il principio viene formulato come l'affermazione che se una proprietà dei numeri naturali è provata per 0 (*base induttiva*) ed ogni volta che la proprietà è provata per il generico numero naturale n (*ipotesi induttiva*), si riesce a provarla anche per n+1(*tesi induttiva*), allora la proprietà è provata per ogni numero naturale (*tesi*). E' immediato cogliere nel procedimento una interpretazione potenziale dell'infinito, nonché la giustificazione del nome del metodo. Si tratta di compiere una sorta di esperimento mentale: si prova la proprietà per 0, la base induttiva. Poi la seconda parte permette di provare, senza bisogno di provarlo direttamente, che la proprietà è dimostrata per 1, per 2 e così via. E' appunto la locuzione "e così via" oppure "eccetera" che richiama l'infinito potenziale. Nei ragionamenti matematici quando essa compare, solitamente, cela un'applicazione del principio di induzione matematica. Un aspetto che differenzia l'induzione matematica da quella delle scienze empiriche è che la sua forza dimostrativa non si basa sul numero delle osservazioni, dato che verificare una proprietà per un milione di casi non autorizza a concludere che la proprietà valga per tutti i casi possibili. Se ad esempio si vuole provare che per ogni numero naturale n si ha $n < 2^n$, non si va a verificare che tale relazione vale per tutti i numeri compresi tra 12.337 e 17.654.876 e di qui si conclude l'asserto. C'è bisogno di un procedimento che dia garanzie sul risultato generale senza analizzare i casi possibili dato che essi sono infiniti.

Il principio di induzione è stato posto a fondamento della definizione e costruzione dei numeri naturali da G. **Peano**, anzi si può dire che costituisce una proprietà fondamentale e fondante del concetto di numero naturale. Le sue ripetute ed importanti applicazioni anche in altri campi matematici (Logica compresa) ne fanno uno dei cardini sia per la parte definitoria che per la parte dimostrativa. Anche negli altri postulati di **Peano** è presente un forte sapore di infinito potenziale. Li ricordo, anche perché saranno utili nelle analisi successive. In essi *numero naturale*, *zero* e *successivo* sono concetti primitivo e i postulati servono a stabilirne il significato [7].

1) 0 è un numero naturale;
2) se n è un numero naturale, allora anche n' è un numero naturale;
3) se n e m sono numeri naturali e $n' = m'$ allora $n = m$;
4) non esiste un numero naturale n tale che $0 = n'$
5) *Principio di induzione*: per ogni proprietà P applicabile ai numeri naturali, se vale $P(0)$ e per ogni numero naturale n se da $P(n)$ si ottiene $P(n')$, allora per ogni numero naturale n si ha $P(n)$.

E' interessante riflettere sulla forma del principio di induzione e quindi sulle sue difficoltà dal punto di vista didattico. In esso si distinguono tre parti: la *base induttiva*, vale a dire $P(0)$ che, solitamente, consiste in una semplice verifica; si ha poi il *passo induttivo*, cioè $\forall x\in \mathbb{N}(P(x) \to P(x + 1))$ e la *conclusione* $\forall x\in \mathbb{N}(P(x))$. Una delle difficoltà maggiori è quella di distinguere tra il passo e la conclusione. Il passo ha la forma di un'implicazione; l'antecedente, $P(x)$, viene detto *ipotesi induttiva* ed il conseguente, $P(x + 1)$, detto *tesi induttiva*. La dimostrazione del passo induttivo, un vero teorema nel teorema, è il punto delicato e solitamente utilizza risultati matematici legati alla natura della proprietà da provare.

Ma lo studente che vede per le prime volte usare il principio di induzione come strumento dimostrativo resta preda dello "sgomento". L'insegnante deve dimostrare la proprietà $P(n)$ per ogni numero naturale n e cosa fa? Prima si interessa di un caso $P(0)$ "banale" che, di solito, è ovvio, quindi non vale la pena di essere dimostrato, oppure è immediatamente "falso" perché si tratta di provare una proprietà non per tutti i numeri naturali, ma solo per quelli, ad esempio, maggiori di 5. Poi lo studente vede il professore assumere come ipotesi $P(n)$, proprio quella che deve provare. Ed allora si chiede se il procedimento sia corretto, visto che in qualche caso quando anche lui si è "permesso" di prendere la tesi come ipotesi si è sentito redarguire. E poi, come se non bastasse viene dal docente un'informazione che apparentemente non serve e non interessa: $P(n+1)$, dopo di

[7] **Peano** presenta i suoi postulati in più momenti. La prima versione del 1889 assume come concetti primitivi quelli di numero, uno, successivo e uguale e nove postulati. In una successiva versione del 1891 i concetti primitivi divengono tre, perché ritiene l'eguaglianza un concetto logico, non aritmetico: numero (N), uno (1), successivo (’), cioè la funzione che dato x, x’ è quello che, con altri simboli, cioè + si potrebbe scrivere come x+1. I postulati diventano 5 perché elimina quelli relativi al comportamento dell'eguaglianza relativamente agli altri simboli. Nel 1896 compare 0 e “scompare” 1.

che il docente soddisfatto si volta e chiede se gli allievi hanno capito! E' ovvio che la difficoltà esiste ed è legata al ruolo ed alla applicazione della quantificazione, nonché alle regole dell'inferenza generalizzazione, particolarizzazione e Modus ponens, che vengono prese qui in seria considerazione.

Un risultato che è conseguenza del principio di induzione è la ricursione. Oggi in Informatica riveste molto interesse. La dialettica iterazione-ricursione può essere interpretata come il confronto finito-infinito. Lo strumento su cui si basa la ricursione è un teorema (di **Dedekind**) che può essere così formulato:

TEOREMA (di ricursione). Per ogni $n \in \mathbb{N}$, date le funzioni $g\colon \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ e $h\colon \mathbb{N}^{n+2} \to \mathbb{N}$ esiste una unica funzione $f\colon \mathbb{N}^{n+1} \to \mathbb{N}$ tale che

$$\begin{cases} f(0, x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_n) \\ f(y', x_1, \ldots, x_n) = h(y, f(y, x_1, \ldots, x_n), x_1, \ldots, x_n) \end{cases}$$

Una lettura di questo teorema è quella di far passare dall'infinito potenziale all'infinito in atto. Lo si può vedere bene dall'analisi di un'operazione aritmetica elementare, l'addizione ottenuta mediante ricursione a partire dalla costante 0 e dalla operazione di passaggio al successivo

$$\begin{cases} 0 + a = a \\ b' + a = (b + a)' \end{cases}$$

In questa definizione per ottenere la funzione binaria *addizione*, si parte dalla funzione $g(x)$ unaria data dall'identità e dalla funzione ternaria $h(x,y,z) = y'$, ottenuta dalla composizione del successivo con la seconda proiezione ternaria. Il ruolo dell'infinito potenziale è chiaro: per saper quanto fa 4+3 = 3'+3, basta sapere quanto fa 3+3=2'+3, quindi basta sapere quanto fa 2+3=1'+3, di qui si risale a 1+3=0'+3. Siamo in presenza di una discesa che termina, per il principio della discesa finita. Ma d'altra parte abbiamo una definizione potenziale dell'addizione, in quanto se si arriva a definire 765+3, siamo in grado di determinare 766+3, e così via. Il teorema di ricursione dice che questo processo potenziale è frutto di una infinità in atto, la funzione globale *addizione* di cui i casi considerati sono esemplari.

20. Finito ed infinito in Algebra lineare.

L'algebra, solitamente, prescinde dal finito e dall'infinito, più interessata alla parte formale della trattazione dei simboli. Tuttavia c'è un caso che sovente si incontra in cui il simbolo ∞ è sinonimo di $\mathbb{R}$. L'ambito è quello dei sistemi lineari. Nel caso di sistemi con un numero di equazioni diverso dal numero delle incognite, oppure dei sistemi omogenei, si applica il teorema di **Rouché** (1832 - 1910) - **Capelli** (1855 - 1910) che stabilisce le condizioni per l'esistenza di soluzioni, basandosi sul rango delle matrici coinvolte. Si parla spesso di ∞^n soluzioni. Il significato di questo simbolo è diverso da quello usato altrove. Il problema sottinteso è da ricondursi a spazi vettoriali e ad applicazioni lineari tra essi. Data f: $\boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$, data una base di $\boldsymbol{V}$ ed una base di $\boldsymbol{W}$ e considerati i vettori corrispondenti essi generano un sottospazio vettoriale di $\boldsymbol{W}$. L'aver fissato le basi in $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ permette di associare una matrice a f. Il rango di questa matrice (la matrice incompleta nella terminologia del teorema di **Rouché**-**Capelli**) coincide con la dimensione di tale sottospazio. La matrice completa analizza quanti sono i vettori linearmente indipendenti tra quelli che sono i trasformati della base di $\boldsymbol{V}$ mediante f ed un nuovo vettore le cui componenti sono date dai termini noti del sistema (rispetto alla base fissata in $\boldsymbol{W}$). Se tali numeri sono diversi, il vettore "temine noto" non appartiene al sottospazio immagine di $\boldsymbol{V}$, altrimenti esso appartiene. Si tratta di trovare allora un vettore di $\boldsymbol{V}$ che corrisponda ad esso. In realtà, per altri teoremi noti (il cosiddetto teorema del rango: $dim(\boldsymbol{V}) = dim(ker(f)) + dim(Im(f))$) di soluzioni, in generale non ce n'è una sola, ma la somma di una soluzione con un vettore del nucleo di f è ancora una soluzione. Il problema è quindi quello di "contare" quanti elementi ci sono nel nucleo di f. questo conteggio è effettuato dalla dimensione di $ker(f)$. Così ∞^n significa che $dim(ker(f)) = n$. Queste considerazioni prescindono dal campo su cui si è costruito lo spazio vettoriale (a meno di commutatività). Per questo il simbolo di infinito non ha senso. Esso richiama un altro teorema: due spazi vettoriali su un corpo K di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione. Un esempio è dato appunto da K^n. Se K è un campo infinito, allora la scrittura ∞^n sembra fare riferimento alla cardinalità di K^n . Essa però non distingue tra vari tipi di infinito. Se il campo è finito è sicuramente scorretta.

Questo esempio mostra un uso interessante del finito per "padroneggiare" l'infinito. Gli spazi vettoriali, ma anche le estensioni dei campi, hanno in sé un *carattere finito*, la dimensione appunto, o il grado di trascendenza (nel caso delle estensioni dei campi) che permettono di parlare dell'infinito restando al finito. In generale ciò avviene per tutte le situazioni in cui si può fare una teoria della dipendenza e/o indipendenza.